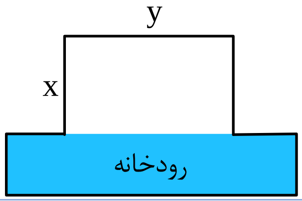
ریاضی ۱۱

شمارهٔ آزمون	بودجه‌بندی
آزمون شمارهٔ ۱	فصل ۱
آزمون شمارهٔ ۲	فصل ۲ و ۳
آزمون شمارهٔ ۳	جامع نیمسال اول
آزمون شمارهٔ ۴	فصل ۱ و فصل ۲ (تا انتهای ترسیم‌های هندسی)
آزمون شمارهٔ ۵	فصل‌های ۱ و ۲ و فصل ۳ (تا انتهای توابع رادیکالی)
آزمون شمارهٔ ۶	جامع نیمسال اول

آزمون شماره ۱

آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی: **ریاضی۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان:**۱۴۰۲/۰۸/۱۲**	مدّت امتحان: **۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **یازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۱ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۱	درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) دو خط $x+۲y=۶$ و $y-۲x=-۳$ باهم موازی‌اند. ب) کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=-(x+۱)^۲+۳$ برابر -۳ است.	۰/۵
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,-۳)$ نسبت به نقطهٔ $B(۲,-۲)$، نقطهٔ .... است. ب) مجموع ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲-۱۲x+۱=۰$ برابر .... و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن برابر .... است.	۱
۳	معادلهٔ سهمی را بنویسید که رأس آن نقطهٔ $S(-۲,۳)$ بوده و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -۱ قطع می‌کند.	۲
۴	مثلث ABC با رأس‌های $A(-۱,۱)$، $B(۲,-۳)$ و $C(۴,۵)$ مفروض است. مطلوبست محاسبه: الف) طول ارتفاع AH ب) طول میانه وارد بر ضلع BC پ) مساحت مثلث ABC	۵
۵	اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۱=۰$ باشند، معادلهٔ درجهٔ دومی را تشکیل دهید که ریشه‌های آن به‌صورت $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ باشند.	۳
۶	می‌خواهیم با نرده‌ای به طول ۲۸۰ متر در کنار رودخانه قطعه زمینی را به شکل مستطیل محصور کنیم به طوری که در یک طرف آن، رودخانه قرار گیرد. بیش‌ترین مساحت این زمین چند متر مربع است؟  	۲/۵
۷	هریک از معادله‌های زیر را حل کنید. الف) $\sqrt{۲x+۵}-\sqrt{x-۱}=۲$ ب) $\frac{۳x-۶}{۲x^۲-۶x}-\frac{۴}{x-۳}=\frac{۲x+۱}{x}$ پ) $(x^۲-۲x)^۲-(x^۲-۲x)=۲$	۶
	موفق باشید.	۲۰

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۰۸/۱۲**	مدّت امتحان: **۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **یازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۶ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخنامه	نمره

ردیف ۱ — نمره ۰/۵

مصحح شو:

الف) نادرست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵)

روش حل مسئله:

الف) ابتدا شیب هر دو خط را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x+۲y=۶ \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۳ \Rightarrow m_۱=-\frac{۱}{۲} \\ y-۲x=-۳ \Rightarrow y=۲x-۳ \Rightarrow m_۲=۲ \end{array}\right. \Rightarrow m_۱\times m_۲=-۱$$

بنابراین دو خط داده شده برهم عمودند.

ب) کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=-(x+۱)^۲+۳$ برابر ۳ است.

الف)با فرض این‌که $m_۱$ شیب خط $\ell_۱$ و $m_۲$ شیب خط $\ell_۲$ باشد در این صورت:

اگر $m_۱=m_۲$ باشد آن‌گاه دو خط $\ell_۱$ و $\ell_۲$ باهم موازی‌اند.

اگر $m_۱\times m_۲=-۱$ باشد آن‌گاه دو خط $\ell_۱$ و $\ell_۲$ بر هم عمودند.

ب)اگر ضابطه یک تابع درجه دوم به‌صورت $f(x)=a(x-\alpha)^۲+\beta$ باشد در این صورت کم‌ترین مقدار (یا بیش‌ترین مقدار) این تابع برابر $y_S=\beta$ است.

ردیف ۲ — نمره ۱

مصحح شو:

الف) $C(۳,-۱)$ (۰/۵) ب) ۳ (۰/۲۵)، $\frac{۱}{۴}$ (۰/۲۵)

روش حل مسئله:

الف) می‌خواهیم که قرینه نقطه $A(۱,-۳)$ را نسبت به نقطه $B(۲,-۲)$ پیدا کنیم. حال اگر نقطه موردنظر را نقطه C فرض کنیم در این صورت نقطه B، وسط پاره‌خط AC قرار دارد، پس:

$$\text{است } AC \text{ وسط } B \Rightarrow \begin{cases} x_B=\frac{x_A+x_C}{۲} \Rightarrow ۲=\frac{۱+x_C}{۲} \Rightarrow x_C=۳ \\ y_B=\frac{y_A+y_C}{۲} \Rightarrow -۲=\frac{-۳+y_C}{۲} \Rightarrow y_C=-۱ \end{cases}$$

بنابراین قرینه نقطه A نسبت به نقطه B به‌صورت $C(۳,-۱)$ است.

ب) با توجه به معادله $۴x^۲-۱۲x+۱=۰$، داریم:

جمع ریشه‌ها: $S=-\frac{b}{a}=-\frac{(-۱۲)}{۴}=\frac{۱۲}{۴}=۳$

ضرب ریشه‌ها: $P=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۴}$

نقشهٔ نهایی:

بعضی وقتا سؤالای جای خالی یه کمی چالش میشن چرا که برخلاف ظاهرشون برای این‌که بتونی اون جای خالی کوچیک رو پُر کنی باید یه سری عملیات ریاضی رو انجام بدی که هیچ نمره‌ای هم ندارن چرا که توی این‌جور سؤالا فقط به جواب آخر نمره میدن!

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ باشند در این صورت:

$$\begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها}: S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\\ \text{ضرب ریشه‌ها}: P=\alpha\beta=\frac{c}{a}\end{cases}$$

۳

مصحح شو:

می‌دانیم که مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(-۲,۳)$ است، پس:

$$y=a(x-\alpha)^{۲}+\beta \quad (۰/۲۵) \xrightarrow[\beta=۳]{\alpha=-۲} y=a(x+۲)^{۲}+۳ \quad (۰/۵)$$

سؤال گفته که این سهمی محور عرض‌ها رو توی نقطه‌ای به عرض ۱− قطع می‌کنه پس نتیجه می‌گیریم که $\underbrace{\text{نقطه}(۰,-۱)\text{روی سهمی قرار داره}}_{(۰/۲۵)}$ بنابراین:

$$y=a(x+۲)^{۲}+۳ \xrightarrow{(۰,-۱)} -۱=a(۰+۲)^{۲}+۳ \Rightarrow a=-۱ \quad (۰/۵)$$

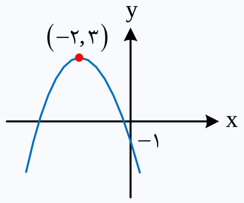
در نتیجه معادلهٔ این سهمی به‌صورت زیر است:

$$y=-(x+۲)^{۲}+۳ \quad (۰/۵)$$

نقشهٔ نهایی:

گاهی وقتا همین سؤال رو به‌صورت نموداری میدن، ببین:

معادلهٔ سهمی مقابل را بنویسید:



اگر نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$، مختصات رأس یک سهمی باشد، معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x-\alpha)^{۲}+\beta$ می‌باشد.

۲

۴

مصحح شو:

الف) برای به‌دست آوردن طول ارتفاع AH، ابتدا باید معادلهٔ خطی که از دو نقطه $B(۲,-۳)$ و $C(۴,۵)$ عبور می‌کند را به‌دست بیاوریم:

$$\underbrace{m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۵-(-۳)}{۴-۲}=\frac{۸}{۲}=۴ \quad (۰/۲۵)$$

$$y-y_B=m_{BC}(x-x_B) \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow y+۳=۴(x-۲) \Rightarrow y=۴x-۱۱ \quad (۰/۲۵)$$

راهنمای تصحیح: برای به‌دست آوردن معادله فوق اگر به جای x_B و y_B، مختصات نقطه C نیز قرار گیرد نمره تعلق می‌گیرد.

بنابراین معادله خطی که شامل نقاط B و C است به‌صورت $BC: ۴x-y-۱۱=۰$ است حال برای به‌دست آوردن طول ارتفاع AH باید فاصله نقطه $A(-۱,۱)$ را از ضلع BC به‌دست بیاوریم:

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow AH=\frac{|۴(-۱)+(-۱)(۱)-۱۱|}{\sqrt{۴^{۲}+(-۱)^{۲}}} \quad (۰/۲۵) \quad \Rightarrow AH=\frac{|-۴-۱-۱۱|}{\sqrt{۱۶+۱}}=\frac{۱۶}{\sqrt{۱۷}} \quad (۰/۲۵)$$

۵

ب) برای به‌دست آوردن طول میانه وارد بر ضلع BC، ابتدا باید مختصات نقطهٔ وسط ضلع BC را به‌دست بیاوریم:

$$\begin{cases}B(۲,-۳)\\C(۴,۵)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overbrace{x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}}^{(۰/۲۵)}=\frac{۲+۴}{۲}=۳\quad(۰/۲۵)\\\underbrace{y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}}_{(۰/۲۵)}=\frac{-۳+۵}{۲}=۱\quad(۰/۲۵)\end{cases}\Rightarrow\underbrace{M(۳,۱)}_{(۰/۲۵)}$$

حال باید فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۱,۱)$ را از نقطهٔ $M(۳,۱)$ را به‌دست بیاوریم:

$$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^۲+(y_M-y_A)^۲}\quad(۰/۲۵)$$

$$AM=\sqrt{(۳-(-۱))^۲+(۱-۱)^۲}\quad(۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow AM=\sqrt{۱۶+۰}=\sqrt{۱۶}=۴\quad(۰/۲۵)$$

پ) ابتدا فاصلهٔ دو نقطهٔ $B(۲,-۳)$ و $C(۴,۵)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\underbrace{BC=\sqrt{(x_B-x_C)^۲+(y_B-y_C)^۲}}_{(۰/۲۵)}=\sqrt{(۲-۴)^۲+(-۳-۵)^۲}=\sqrt{۴+۶۴}=\sqrt{۶۸}\quad(۰/۲۵)$$

حال مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\underbrace{S=\frac{BC\times AH}{۲}}_{(۰/۲۵)}=\frac{\sqrt{۶۸}\times\frac{۱۶}{\sqrt{۱۷}}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۱۷}\times۱۶}{۲\sqrt{۱۷}}\quad(۰/۲۵)\Rightarrow\underset{(۰/۲۵)}{S=۱۶}$$

راهنمای تصحیح: اگر مساحت مثلث ABC به کمک روابط $S=\frac{AB\times CH}{۲}$ یا $S=\frac{AC\times BH}{۲}$ نیز محاسبه شود نمره کامل تعلق می‌گیرد.

الف) فاصله نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$AH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

ب) طول میانهٔ وارد بر ضلع:

۱- اگر نقاط $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ دو سر پاره‌خط AB باشند مختصات نقطهٔ وسط این پاره‌خط برابر است با:

$$\begin{cases}x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}\\y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}\end{cases}\Rightarrow M=(x_M,y_M)$$

۲- فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

۵

مصحح شو:

می‌دانیم که α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۱=۰$ هستند، پس:

$$\begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها}: \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(-۳)}{۲}=\frac{۳}{۲} \quad (۰/۵) \\ \text{ضرب ریشه‌ها}: \alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۲} \quad (۰/۵) \end{cases}$$

می‌خواهیم معادلهٔ درجه دومی بسازیم که ریشه‌های اون $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ باشند پس:

$$\begin{cases} \text{جمع ریشه‌های معادله جدید}: S=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}=-۳ \quad (۰/۵) \\ \text{ضرب ریشه‌های معادله جدید}: P=\frac{۱}{\alpha}\times\frac{۱}{\beta}=\frac{۱}{\alpha\beta}=\frac{۱}{-\frac{۱}{۲}}=-۲ \quad (۰/۵) \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به‌صورت زیر است:

$$x^۲-Sx+P=۰ \quad (۰/۵) \xrightarrow[P=-۲]{S=-۳} x^۲+۳x-۲=۰ \quad (۰/۵)$$

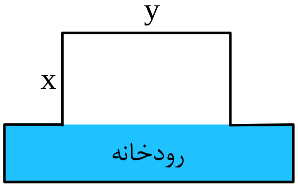
معادله درجهٔ دومی که مجموع ریشه‌های آن برابر $S=-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌های آن برابر $P=\frac{c}{a}$ باشد را می‌توان به‌صورت $x^۲-Sx+P=۰$ تشکیل داد.

۳

۶

مصحح شو:

با توجه به شکل مسئله، ابتدا سعی می‌کنیم که تابع مساحت را به‌دست بیاوریم:



محیط زمین: $۲x+y$

باید محیط زمین را نرده‌کشی کنیم، از طرفی اندازهٔ نرده‌ای که در اختیار داریم برابر ۲۸۰ متر است، پس:

$$۲x+y=۲۸۰ \quad (۰/۵) \Rightarrow y=۲۸۰-۲x \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{مساحت زمین}: S=xy \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{y=۲۸۰-۲x} S=x(۲۸۰-۲x)$$

$$\Rightarrow S=-۲x^۲+۲۸۰x \quad (۰/۵)$$

از طرفی می‌دونیم که بیش‌ترین مقدار یه تابع درجهٔ دوم به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ به‌دست میاد، پس:

$$\underbrace{x=-\frac{b}{۲a}}_{(۰/۲۵)}=\frac{-۲۸۰}{۲(-۲)}=\frac{۲۸۰}{۴}=۷۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{S_{max}=-۲(۷۰)^۲+۲۸۰(۷۰)}_{(۰/۲۵)}=۷۰(-۱۴۰+۲۸۰)=۷۰\times۱۴۰=۹۸۰۰ \quad (۰/۲۵)$$

راهنمای تصحیح: اگر بیش‌ترین مقدار مساحت از رابطهٔ $-\frac{\Delta}{۴a}$ به‌دست بیاید نمرهٔ کامل تعلق می‌گیرد.

بیشترین و کمترین مقدار یک تابع درجهٔ دوم:

در برخی از سؤالات مربوط به تابع درجهٔ دوم معادله یا نمودار یک تابع درجهٔ دوم را به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند که بیش‌ترین مقدار و یا کم‌ترین مقدار آن را به‌دست بیاوریم، اما در بعضی از سؤال‌ها ابتدا باید به کمک اطلاعات موجود در مسئله، تابع درجهٔ دوم را به‌صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ تشکیل داده و سپس با استفاده از رابطهٔ $y_S=f\left(-\frac{b}{۲a}\right)=\frac{-\Delta}{۴a}$، بیش‌ترین مقدار و یا کم‌ترین مقدار آن را به‌دست بیاوریم.

۲/۵

۷

۶

مصحح شو:

الف) $\sqrt{۲x+۵}-\sqrt{x-۱}=۲$

یکی از رادیکال‌ها رو یه طرف نگه می‌داریم و بقیه جمله‌ها رو ببریم طرف دیگه!

$$\sqrt{۲x+۵}=۲+\sqrt{x-۱}\xrightarrow[\text{عملیات توان‌رسانی (۰/۲۵)}]{\text{توان ۲ طرفین}}۲x+۵=۴+۴\sqrt{x-۱}+(x-۱)$$

$$\Rightarrow ۴\sqrt{x-۱}-x-۲=۰\xrightarrow[\text{تنها کن}]{\text{رادیکال رو یه طرف}}۴\sqrt{x-۱}=x+۲\quad(۰/۵)$$

حالا دوباره دو طرف تساوی رو به توان ۲ برسون! (عملیات توان‌رسانی (۰/۲۵))

$$۱۶(x-۱)=x^۲+۴x+۴\xrightarrow{\text{ساده کن}}x^۲-۱۲x+۲۰=۰\quad(۰/۲۵)\xrightarrow{\text{حل معادله}}\begin{cases}x=۲ & (۰/۲۵)\\ x=۱۰ & (۰/۲۵)\end{cases}$$

توجه کنید که $x=۲$ و $x=۱۰$، $\underbrace{\text{هردو قابل قبول‌اند}}_{(۰/۲۵)}$ چرا که هم در دامنه تعریف x قرار دارن و هم این‌که در معادله اصلی صدق می‌کنن.

ب) $\frac{۳x-۶}{۲x^۲-۶x}-\frac{۴}{x-۳}=\frac{۲x+۱}{x}$

مخرج هرکدوم از کسرها رو به عامل‌های اول تجزیه کن بعدش همه کسرها رو بیار یه طرف و مخرج مشترک بگیر...

$$\frac{۳x-۶}{۲x(x-۳)}-\frac{۴}{x-۳}=\frac{۲x+۱}{x}\Rightarrow\frac{۳x-۶}{۲x(x-۳)}-\frac{۴}{x-۳}-\frac{۲x+۱}{x}=۰\quad(۰/۵)$$

$$\frac{(۳x-۶)-۴(۲x)-(۲x+۱)(۲(x-۳))}{۲x(x-۳)}=۰\Rightarrow\frac{-۴x^۲+۵x}{۲x(x-۳)}=۰\quad(۰/۵)$$

می‌دونیم یه کسر وقتی برابر صفره که صورتش صفر باشه، پس:

$$\underbrace{-۴x^۲+۵x=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow x(-۴x+۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & (۰/۲۵)\\ -۴x+۵=۰\Rightarrow x=\frac{۵}{۴} & (۰/۲۵)\end{cases}$$

توجه کنید که $\underbrace{x=۰\ \text{قابل قبول نیست}}_{(۰/۲۵)}$ چرا که مخرج کسر $\frac{۲x+۱}{x}$ و $\frac{۳x-۶}{۲x^۲-۶x}$ را صفر می‌کند.

پ) $\left(x^۲-۲x\right)^۲-\left(x^۲-۲x\right)=۲$

ابتدا عبارت $x^۲-۲x$ رو برابر t فرض می‌کنیم:

$$\underbrace{t^۲-t=۲}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow t^۲-t-۲=۰\xrightarrow{\text{حل معادله}}\begin{cases}t=-۱ & (۰/۲۵)\\ t=۲ & (۰/۲۵)\end{cases}$$

می‌دونیم که $t=x^۲-۲x$ بود، پس:

$$\underbrace{x^۲-۲x=-۱}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\Rightarrow(x-۱)^۲=۰\Rightarrow x=۱\quad(۰/۲۵)$$

$$\underbrace{x^۲-۲x=۲}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow x^۲-۲x-۲=۰\xrightarrow{\Delta=۱۲}\begin{cases}x=\frac{۲+\sqrt{۱۲}}{۲}=\frac{۲+۲\sqrt{۳}}{۲}=۱+\sqrt{۳} & (۰/۲۵)\\ x=\frac{۲-\sqrt{۱۲}}{۲}=\frac{۲-۲\sqrt{۳}}{۲}=۱-\sqrt{۳} & (۰/۲۵)\end{cases}$$

نقشهٔ نهایی الف:

یادت باشه توی کل ریاضیات هر جا یه معادله‌ای رو حل کردی آخرش باید جوابی که به‌دست میاری رو توی معادلهٔ اصلی امتحان کنی!

نقشهٔ نهایی ب:

یادت باشه بعد از حل هر معادله‌ای برای این‌که نمره کامل رو بگیری باید بنویسی که جواب (یا جواب‌ها) قابل قبول هستن یا نیستن!

برای حل یک معادلهٔ رادیکالی باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱- یکی از رادیکال‌ها را در یک طرف معادله نگه می‌داریم و مابقی جمله‌ها را به طرف دیگر معادله منتقل می‌کنیم.

۲- طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم (معمولاً طرفین را به توان ۲ می‌رسونیم)

(توجه داشته باشید که اگر با به توان رساندن طرفین معادله، مجدداً در معادله عبارت رادیکالی حضور داشته باشد سعی می‌کنیم که با تکرار مراحل ۱ و ۲، کل معادله را از حالت رادیکالی خارج کنیم)

۳- معادلهٔ به‌دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و آن را حل می‌کنیم و جواب (یا جواب‌های) معادله را به‌دست می‌آوریم.

۴- جواب(های) به‌دست آمده را در معادلهٔ اصلی آزمایش می‌کنیم و جواب‌هایی را قبول می‌کنیم که اولاً در دامنه تعریف متغیر معادله قرار داشته باشند و ثانیاً در معادلهٔ اصلی صدق کنند.

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

ابتدا مخرج هریک از کسرها را (در صورت لزوم) به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم. (چندجمله‌ای)

طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضربِ مشترکِ (ک.م.م) مخرج کسرها ضرب می‌کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود.

عبارت جبری به‌دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و معادلهٔ حاصل شده (معمولاً درجه ۲) را حل می‌کنیم.

در نهایت جواب‌های به‌دست آمده را در معادلهٔ اصلی امتحان می‌کنیم.

توجه کنید که جواب‌های به‌دست آمده زمانی قابل قبول خواهند بود که اولاً مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نکنند و ثانیاً این جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت داشته باشند (قسمت دوم رو متوجه نشدم! یعنی این‌که مثلاً اگر قراره با حل یه معادله طول یک شکل رو محاسبه کنیم، اندازه این طول رو منفی به‌دست نیاریم.)

برای حل برخی از معادله‌ها، باید با استفاده از تغییر متغیر، آن معادلات را به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل کرد. برای این منظور به روش زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا در معادلهٔ داده شده، به جای یک عبارت برحسب x ، از یک تغییر متغیر مناسب (مثلاً t) استفاده کرده و معادلهٔ داده شده را به معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب t تبدیل می‌کنیم.

سپس معادلهٔ درجهٔ دوم را حل کرده و مقدار (مقادیر) t را به‌دست می‌آوریم.

در نهایت عبارتی را که آن را برابر t فرض کرده بودیم را برابر مقدار (مقادیر) t قرار می‌دهیم و با حل آن مجهول‌های اصلی یعنی x را به‌دست می‌آوریم.

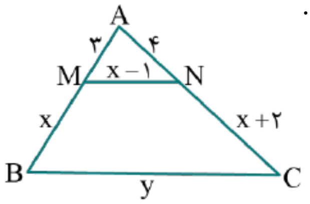
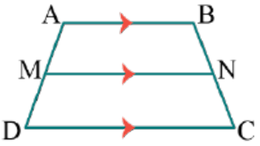
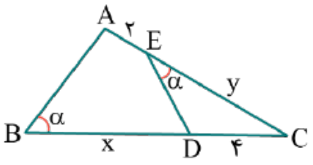
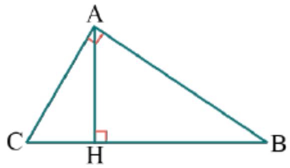
موفق باشید.

۲۰

آزمون شماره ۲

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۰۹/۱۰**	مدت امتحان: **۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **یازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**

آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی — **گروه آموزشی ماز**

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۱	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) مقدار $[\sqrt{۳}-\pi]$ برابر .... است. ([ ] علامت جزء صحیح است.) ب) به استدلالی که براساس نتیجه‌گیری منطقی و بر پایهٔ واقعیت‌هایی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استدلال .... می‌گوییم. پ) اگر تساوی $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}$ برقرار باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ برابر .... است. ت) در دو مثلث متشابه، اگر نسبت اضلاع $\frac{۳}{۴}$ باشد؛ آن‌گاه نسبت نیمسازها برابر .... و نسبت مساحت‌ها برابر .... است.	۲
۲	الف) اگر $n\in\mathbb{N}$ و $n^۲$ عددی زوج باشد، به کمک برهان خلف ثابت کنید که n نیز عددی زوج است. ب) برای رد کردن حکم کلی مقابل، مثال نقض بیاورید. «در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند»	۲
۳	در مثلث متساوی‌الساقین ABC، اگر طول ارتفاع $AH=۳$ و مساحت آن برابر ۹ باشد، طریقهٔ رسم مثلث را شرح داده و آن را رسم کنید.	۱/۷۵
۴	در مثلث ABC پاره‌خط MN با ضلع BC موازی است. مقادیر مجهول x و y را محاسبه کنید.  	۱/۵
۵	در ذوزنقهٔ مقابل $AB \| MN \| DC$ است. ثابت کنید: $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$  	۱/۵
۶	در شکل مقابل اگر $AB=۳DE$ باشد مقادیر مجهول x و y را محاسبه کنید.  	۲/۵
۷	در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل، اگر $AB=۶$ و $AH=۳$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط‌های BH، CH، BC و AC را به‌دست آورید.  	۳
۸	دامنهٔ توابع زیر را به‌دست آورید. الف) $f(x)=\sqrt{x^۲-۴x+[x]+[-x]+۵}$ ب) $g(x)=\frac{x-۳}{\|x^۲-۴\|-۳}$	۳/۲۵
	ادامهٔ سؤالات در صفحهٔ بعد	

آزمون شماره ۲

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۰۹/۱۰**	مدت امتحان: **۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **یازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۹	**آیا دو تابع زیر باهم مساویند؟ چرا؟** $f(x)=\frac{x}{\lvert x\rvert}$ $g(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x}$	۰/۷۵
۱۰	**نمودار توابع زیر را رسم کنید.** الف) $f(x)=\sqrt{x-۱}-۲$ ب) $g(x)=x+[x]\ ;\ D_g:(-۲,۲]$	۱/۷۵
	موفق باشید.	۲۰

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۰۹/۱۰**	مدت امتحان: **۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **یازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۶ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌نامه	نمره
۱		۲

مصحح شو:

الف) ۲− (۰/۵)　　ب) استنتاجی (۰/۲۵)　　پ) $\frac{۱۰}{۷}$ (۰/۷۵)　　ت) $\frac{۳}{۴}$ (۰/۲۵) / $\frac{۹}{۱۶}$ (۰/۲۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف)

$$\begin{cases}\sqrt{۳}\simeq ۱/۷\\ \pi\simeq ۳/۱۴\end{cases}\Rightarrow\left[\sqrt{۳}-\pi\right]=\left[۱/۷-۳/۱۴\right]=\left[-۱/۴۴\right]=-۲$$

پ)

$$\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{(۳a+۱۰)-(۱۰+۲a)}{۱۰+۲a}=\frac{(۳b+۷)-(۷+۲b)}{۷+۲b}$$

$$=\frac{a}{۱۰+۲a}=\frac{b}{۷+۲b}\xrightarrow[\text{طرفین}]{\times ۲}\frac{۲a}{۱۰+۲a}=\frac{۲b}{۷+۲b}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{۲a}{(۱۰+۲a)-۲a}=\frac{۲b}{(۷+۲b)-۲b}$$

$$\Rightarrow\frac{۲a}{۱۰}=\frac{۲b}{۷}\Rightarrow\frac{۲a}{۲b}=\frac{۱۰}{۷}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۷}$$

تابع جزء صحیح و ویژگی‌های تناسب:

* تابع جزءصحیح، تابعی است که به هر عدد صحیح، خودِ همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد. به عبارت دیگر:

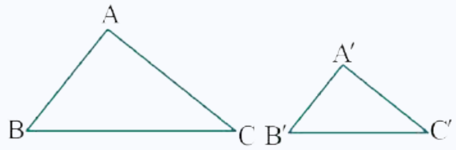
$$n\le x<n+۱\xrightarrow{n\in\mathbb{Z}}[x]=n$$

$-۱<-۰/۶<۰$　مثال: $[-۰/۶]=-۱$　　$۱<۱/۲<۲$　مثال: $[۱/۲]=۱$　　مثال: $[-۳]=-۳$

* به کمک اعمال و روش‌های جبری، از هر تناسبی می‌توان تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. مهم‌ترین این ویژگی‌ها را در جدول زیر ببینید. (البته با فرض این‌که مخرج تمامی کسرها مخالف صفر است.)

ویژگی	رابطه	مثال
طرفین – وسطین	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$	$\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow ۲\times۱۰=۴\times۵$
معکوس کردن طرفین تناسب	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	$\frac{۳}{۴}=\frac{۶}{۸}\Rightarrow\frac{۴}{۳}=\frac{۸}{۶}$
تعویض جای طرفین	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}\Rightarrow\frac{۶}{۳}=\frac{۴}{۲}$
تعویض جای وسطین	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}\Rightarrow\frac{۲}{۴}=\frac{۳}{۶}$
ترکیب نسبت در صورت	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰}\Rightarrow\frac{۳+۵}{۵}=\frac{۶+۱۰}{۱۰}$
ترکیب نسبت در مخرج	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰}\Rightarrow\frac{۳}{۳+۵}=\frac{۶}{۶+۱۰}$
تفضیل نسبت در صورت	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$	$\frac{۷}{۵}=\frac{۱۴}{۱۰}\Rightarrow\frac{۷-۵}{۵}=\frac{۱۴-۱۰}{۱۰}$
تفضیل نسبت در مخرج	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$	$\frac{۷}{۵}=\frac{۱۴}{۱۰}\Rightarrow\frac{۷}{۵-۷}=\frac{۱۴}{۱۰-۱۴}$
ترکیب صورت‌ها و مخرج‌ها	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	$\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۶}\Rightarrow\frac{۳+۹}{۲+۶}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۶}$

* هرگاه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با نسبت K متشابه باشند، داریم:



$$* \quad \frac{\text{ارتفاع } ABC}{\text{ارتفاع } A'B'C'} = \frac{\text{نیمساز } ABC}{\text{نیمساز } A'B'C'} = \frac{\text{میانه } ABC}{\text{میانه } A'B'C'} = \frac{\text{محیط } ABC}{\text{محیط } A'B'C'} = K$$

$$* \quad \frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } A'B'C'} = K^۲$$

۲

مصحح شو:

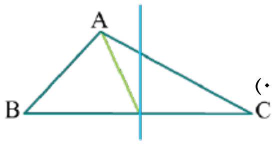
الف) ابتدا فرض می‌کنیم که حکم مسئله نادرست باشد، یعنی فرض می‌کنیم که n عددی زوج نباشد. (۰/۲۵) بنابراین n عددی فرد است و می‌توان نوشت $n = ۲k+۱$، به‌طوری که k یک عدد طبیعی باشد (۰/۲۵)، پس:

$$n^۲ = (۲k+۱)^۲ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow n^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۲\underbrace{(۲k^۲ + ۲k)}_{k'} + ۱ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow n^۲ = ۲k' + ۱ \quad (۰/۲۵)$$

پس $n^۲ = ۲k'+۱$ عددی فرد است و با فرض مسئله در تناقض است و لذا از ابتدا n نمی‌توانست، عددی فرد باشد. (۰/۲۵)

ب) مثلث مقابل را در نظر بگیرید:



(رسم شکل ۰/۵)

در این مثلث، میانه و عمود منصف نظیر ضلع BC برهم منطبق نیستند.

راهنمای مصحح: رسم شکل مناسب ۰/۵ نمره دارد. و رسم هر مثلثی که حکم کلی گفته شده را نقض کند، قابل قبول است.

۲

۳

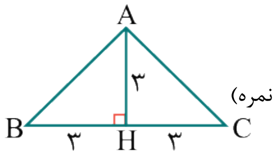
مصحح شو:

می‌دانیم که ارتفاع $AH = ۳$ و مساحت مثلث برابر ۹ است، یعنی:

$$\underbrace{S_{ABC} = \frac{BC \times AH}{۲}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{۹ = \frac{BC \times ۳}{۲}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow BC = ۶ \quad (۰/۲۵)$$

حال برای رسم مثلث مراحل زیر را طی می‌کنیم:

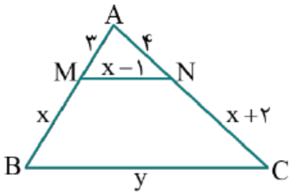
پاره‌خطی به طول ۶ رسم کرده و آن را BC می‌نامیم. سپس از نقطهٔ H وسط BC عمودی به اندازهٔ ۳ جدا می‌کنیم و A می‌نامیم و در نهایت از نقطهٔ A به نقاط B و C وصل می‌کنیم. (۰/۵) (رسم شکل ۰/۵ نمره)



۱/۷۵

۴

مصحح شو:



می‌دانیم که $MN \parallel BC$ است. حال با استفاده از قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{۳}{x} = \frac{۴}{x+۲} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow ۳x + ۶ = ۴x \Rightarrow x = ۶ \quad (۰/۲۵)$$

از طرفی به کمک تعمیم قضیهٔ تالس، داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{۳}{۳+x} = \frac{x-۱}{y} \xrightarrow{x=۶} \frac{۳}{۳+۶} = \frac{۶-۱}{y} \quad (۰/۲۵)$$

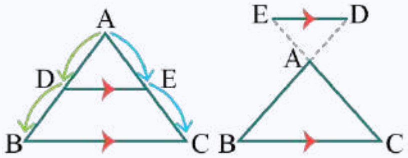
$$\Rightarrow ۳y = ۴۵ \Rightarrow y = ۱۵ \quad (۰/۲۵)$$

راهنمای مصحح: اگر مقدار y به کمک تناسب $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ نیز به‌دست بیاید، نمره تعلق می‌گیرد.

۱/۵

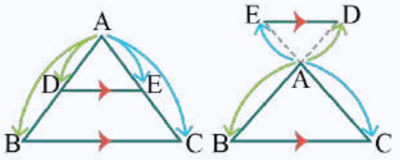
قضیهٔ تالس و تعمیم آن:

قضیهٔ تالس: هرگاه در مثلثی، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث (یا امتداد آن‌ها) را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع (یا امتداد آن‌ها)، پاره‌خط‌هایی جدا می‌کند که اندازهٔ آن‌ها تشکیل یک تناسب می‌دهند. این قضیه را اصطلاحاً تالس جزء‌به‌جزء می‌نامیم. به‌عبارت دیگر اگر در شکل‌های زیر DE با BC موازی باشد، داریم:



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

تعمیم قضیهٔ تالس: هرگاه خطی دو ضلع یک مثلث (یا امتداد آن‌ها) را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم مثلث موازی باشد، در این صورت مثلثی به‌وجود می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است. این قضیه را اصطلاحاً تالس جزء به کل می‌نامیم. به‌عبارت دیگر، اگر در شکل‌های زیر DE با BC موازی باشد، داریم:



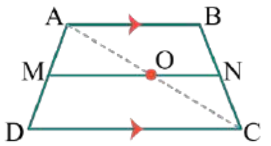
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

۵

۱/۵

مصحح شو:

ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم. حال در مثلث ADC به کمک قضیهٔ تالس، داریم:



$$MO \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{AO}{OC} \quad (I) \quad (۰/۵)$$

حال مجدداً با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث ACB داریم:

$$ON \parallel AB \Rightarrow \frac{CN}{NB}=\frac{OC}{AO} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{NB}{CN}=\frac{AO}{OC} \quad (II) \quad (۰/۵)$$

در نهایت به کمک روابط (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} \frac{AO}{OC}=\frac{NB}{CN} \\ \frac{AO}{OC}=\frac{AM}{MD} \end{cases} \Rightarrow \frac{NB}{CN}=\frac{AM}{MD} \quad (۰/۵)$$

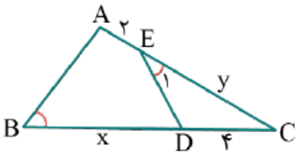
راهنمای مصحح: اگر مراحل اثبات فوق به کمک رسم قطر BD انجام شود، نمره به دانش‌آموز تعلق می‌گیرد.

۶

۲/۵

مصحح شو:

دو مثلث ABC و DEC باهم متشابه‌اند زیرا:



$$\begin{cases} \hat{E}_۱=\hat{B} & (۰/۲۵) \\ \hat{C}: \text{مشترک} & (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DEC} \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین اضلاع متناظر در دو مثلث باهم متناسب‌اند، یعنی:

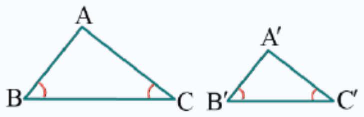
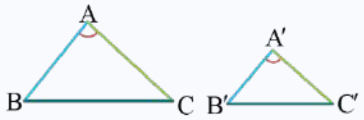
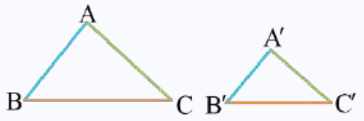
$$\frac{DC}{AC}=\frac{ED}{AB}=\frac{EC}{BC} \quad (۰/۵)$$

از طرفی می‌دانیم که AB = ۳DE است، پس:

$$\frac{۴}{y+۲}=\frac{۱}{۳}=\frac{y}{x+۴} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{cases} \frac{۴}{y+۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow y+۲=۱۲ \Rightarrow y=۱۰ \quad (۰/۵) \\ \frac{y}{x+۴}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x+۴=۳y \xrightarrow{y=۱۰} x=۳۰-۴=۲۶ \quad (۰/۵) \end{cases}$$

حالت‌های تشابه دو مثلث:

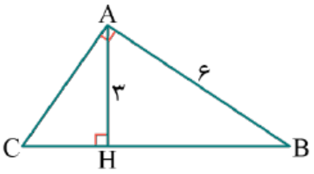
با استفاده از قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها می‌توان سه قضیهٔ زیر را نتیجه گرفت که این قضایا حالت‌های تشابه دو مثلث را بیان می‌کنند:

هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث به حالت دو زاویهٔ برابر (زز)، متشابه‌اند.	$\begin{cases}\hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{cases}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$	
هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب بوده و زاویهٔ بین آن‌ها باهم برابر باشد، آن دو مثلث به حالت دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر (ض‌زض)، متشابه‌اند.	$\begin{cases}\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}\\ \hat{A}=\hat{A}'\end{cases}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$	
هرگاه اندازهٔ سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث به حالت سه ضلع متناسب (ض‌ض‌ض)، متشابه‌اند.	$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$	

۷

۳

مصحح شو:



ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم:

$$(AB)^۲=(AH)^۲+(BH)^۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow ۳۶=۹+(BH)^۲ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow BH=\sqrt{۳۶-۹}=\sqrt{۲۷}=۳\sqrt{۳} \quad (۰/۲۵)$$

حال به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، داریم:

$$(AB)^۲=BH\times BC \quad (۰/۲۵)$$

$$۳۶=\left(۳\sqrt{۳}\right)\times BC \quad (۰/۲۵) \Rightarrow BC=\frac{۳۶}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۱۲\sqrt{۳}}{۳}=۴\sqrt{۳} \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین:

$$BC=BH+HC \quad (۰/۲۵) \Rightarrow ۴\sqrt{۳}=۳\sqrt{۳}+HC \quad (۰/۲۵) \Rightarrow HC=\sqrt{۳} \quad (۰/۲۵)$$

از طرفی:

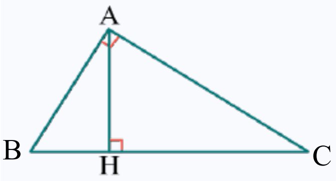
$$(AC)^۲=CH\times BC \quad (۰/۲۵)$$

$$(AC)^۲=\left(\sqrt{۳}\right)\times\left(۴\sqrt{۳}\right) \quad (۰/۲۵) \Rightarrow AC=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳} \quad (۰/۲۵)$$

راهنمای مصحح: ۱. اگر اندازهٔ HC به کمک رابطهٔ $(AH)^۲=BH\times CH$ به‌دست بیاید نیز، نمرهٔ کامل تعلق می‌گیرد.

۲. اگر اندازهٔ ضلع AC به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ACH یا ABC و یا به کمک رابطهٔ $AH\times BC=AB\times AC$ نیز به‌دست بیاید، نمرهٔ کامل تعلق می‌گیرد.

در هر مثلث قائم‌الزاویه، اگر ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، داریم:



- $AH\times BC=AB\times AC$
- $AB^۲=BH\times BC$
- $AC^۲=CH\times BC$
- $AH^۲=BH\times CH$

۸

۳/۲۵

مصحح شو:

الف)

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۴x+[x]+[-x]+۵}$$

می‌دانیم که $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ است، پس:

$$\begin{cases}x\in\mathbb{Z}:f(x)=\sqrt{x^۲-۴x+۵} & (۰/۲۵)\\ x\notin\mathbb{Z}:f(x)=\sqrt{x^۲-۴x+۴} & (۰/۲۵)\end{cases}$$

دو حالت داریم:

۱) اگر $x\in\mathbb{Z}$ باشد، در عبارت زیر رادیکال $\Delta<۰$ و $a>۰$ است و عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است، پس:

$$\underbrace{f(x)=\sqrt{x^۲-۴x+۵}\xrightarrow[a>۰]{\Delta<۰}x\in\mathbb{R}}_{(۰/۲۵)}\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}D_۱=\mathbb{Z}\quad(۰/۲۵)$$

۲) اگر $x\in\mathbb{Z}$ نباشد، در این صورت:

$$\overbrace{f(x)=\sqrt{x^۲-۴x+۴}=\sqrt{(x-۲)^۲}=|x-۲|\Rightarrow x\in\mathbb{R}}^{(۰/۲۵)}\xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}}D_۲=\mathbb{R}-\mathbb{Z}\quad(۰/۲۵)$$

در نتیجه:

$$D_f=D_۱\cup D_۲=\mathbb{Z}\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Z})=\mathbb{R}\quad(۰/۲۵)$$

ب) ابتدا ریشه‌های مخرج کسر را به‌دست آورده و سپس آن‌ها را از $\mathbb{R}$ حذف می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{x-۳}{|x^۲-۴|-۳}$$

$$|x^۲-۴|-۳=۰\quad(۰/۲۵)\Rightarrow|x^۲-۴|=۳\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۴=۳\Rightarrow x^۲=۷\Rightarrow x=\pm\sqrt{۷}\quad(۰/۵)\\ x^۲-۴=-۳\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱\quad(۰/۵)\end{cases}$$

$$\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\pm\sqrt{۷},\pm۱\}\quad(۰/۲۵)$$

دامنهٔ توابع گویا و توابع رادیکالی:

* برای پیدا کردن دامنهٔ توابع گویا به فرم $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ توابع چندجمله‌ای هستند، ریشه(های) عبارت مخرج کسر را (در صورت وجود) پیدا کرده و آن‌ها را از مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ حذف می‌کنیم. به‌عبارت دیگر:

$$D_f=\mathbb{R}-\{x\,|\,Q(x)=۰\}=\mathbb{R}-\{\text{ریشه(های) مخرج کسر}\}$$

* برای پیدا کردن دامنهٔ توابع رادیکالی، با توجه به فرجهٔ رادیکال داریم:

اگر فرجهٔ رادیکال فرد باشد، دامنهٔ تابع با دامنهٔ عبارت زیر رادیکال برابر است. به‌عبارت دیگر، رادیکال فرجهٔ فرد را نادیده می‌گیریم و فقط دامنهٔ عبارت زیر رادیکال را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=\sqrt[\text{فرد}]{g(x)}\Rightarrow D_f=D_g$$

اگر فرجهٔ رادیکال زوج باشد، برای پیدا کردن دامنهٔ تابع، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) دامنهٔ عبارت زیر رادیکال را به‌دست می‌آوریم. (D_g)

۲) عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم و مجموعه جواب آن را به‌دست می‌آوریم. $(g(x)\geq۰)$، دقت کنید که اگر رادیکال با فرجهٔ زوج در مخرج کسر باشد، باید عبارت زیر رادیکال رو بزرگ‌تر از صفر بذاریم. خب معلومه دیگه، مخرج کسر که نمی‌تونه صفر باشه!

۳) از محدوده‌های به‌دست آمده در مراحل ۱ و ۲، اشتراک می‌گیریم.

$$f(x)=\sqrt[\text{زوج}]{g(x)}\Rightarrow D_f=\{x\,|\,x\in D_g\,,g(x)\geq۰\}$$

۹

۰/۷۵

مصحح شو:

بله (۰/۲۵)؛

در مورد توابع $f(x)=\frac{x}{|x|}$ و $g(x)=\frac{|x|}{x}$ داریم:

$$\begin{cases} D_f=D_g=\mathbb{R}-\{۰\} \quad (۰/۲۵) \\ f(x)=g(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases} \quad (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow f(x)=g(x)$$

تساوی توابع:

دو تابع f و g را باهم برابر می‌نامیم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

دامنهٔ توابع f و g باهم برابر باشند.

برای هر x از دامنهٔ یکسان، $f(x)=g(x)$ باشد.

به‌عبارت دیگر، دو تابع f و g زمانی باهم برابرند که دامنهٔ هر دو تابع (قبل از ساده کردن) و ضابطهٔ آن‌ها (بعد از ساده کردن) باهم برابر باشند.

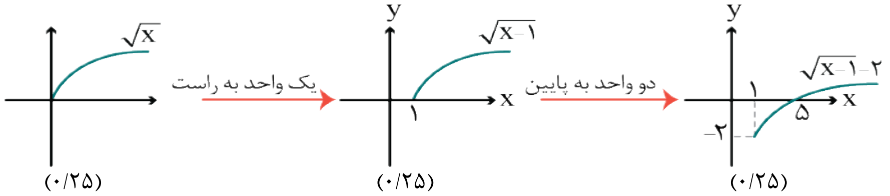
به‌عنوان مثال، دو تابع $f(x)=x-۲$ و $g(x)=\frac{x^۲-۴}{x+۲}$، باهم برابر نیستند، چرا که $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{-۲\}$ است.

۱۰

۱/۷۵

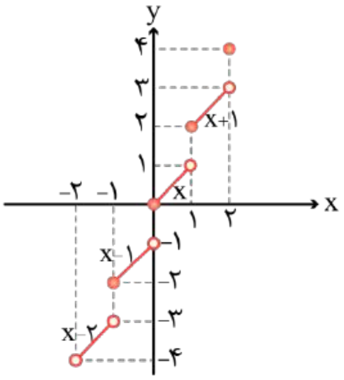
مصحح شو:

الف)



ب) با توجه به جدول زیر داریم:

$x+[x]$	$[x]$	x
$x-۲$	-۲	$-۲<x<-۱$
$x-۱$	-۱	$-۱\le x<۰$
x	۰	$۰\le x<۱$
$x+۱$	۱	$۱\le x<۲$
۴	۲	$x=۲$



(رسم نمودار ۱ نمره)

تبدیل نمودار توابع:

نمودار جدید $(a,k>۰)$	توضیحات و نحوهٔ رسم
$f(x+a)$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور xها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x-a)$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور xها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x)+a$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور yها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x)-a$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور yها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.

۲۰

موفق باشید.

گروه آموزشی ماز

آزمون شماره ۲

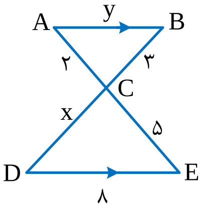
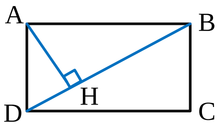
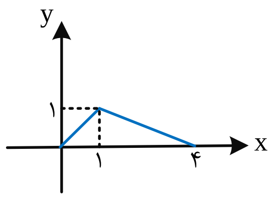
آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۱۰/۰۷**	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **یازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۱	**درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.** **الف) دو خط $\ell_۱: ۵x-۱۲y+۸=۰$ و $\ell_۲: -۱۰x+۲۴y+۱۰=۰$ با یکدیگر موازی‌اند.** **ب) دو تابع $f(x)=x-۱$ و $g(x)=\frac{x^۲-۱}{x+۱}$ باهم برابرند.** **پ) انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۸\pi}{۵}$ رادیان در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.**	۰/۷۵
۲	**در جاهای خالی، عبارت مناسب بنویسید.** **الف) مرکز دایره‌ای که داخل مثلث بوده و بر اضلاع آن مماس است، محل برخورد .... می‌باشد.** **ب) بیشترین مقدار تابع $f(x)=-۲x^۲+۸x-۵$ برابر .... است.** **پ) برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است، قرینهٔ نمودار آن را نسبت به .... رسم کنیم.** **ت) اندازهٔ زاویهٔ $-\frac{۲\pi}{۵}$ رادیان برابر .... درجه و اندازهٔ زاویه ۳۱۵ درجه برابر .... رادیان است.**	۱/۲۵
۳	**گزینهٔ مناسب را انتخاب کنید.** **الف) چه تعداد از توابع زیر در کل دامنهٔ خود یک‌به‌یک هستند؟** • $f(x)=-x+۱$ • $f(x)=۲-\sqrt{x+۱}$ • $f(x)=x^۲+۲$ • $f(x)=\|x-۱\|$ • $f(x)=[x]$ ۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱ **ب) فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,-۴)$ از خط $\ell: ۲x+y=۵$ برابر است با:** ۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $۵\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$	۱
۴	**خط $\ell: ۴x-۳y=۲$ بر دایره‌ای به مرکز $O(۲,-۳)$ مماس است. شعاع دایره را به‌دست آورید.**	۱
۵	**اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-۵x-۱=۰$ باشند، حاصل $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ را به‌دست آورید.**	۱/۵
۶	**معادله‌های زیر را حل کنید.** الف) $x^۴-۹x^۲+۸=۰$ ب) $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=۲$ پ) $[x]+[x-۱]=۳$	۴/۲۵
۷	**محمد و مهدی با هم یک متن را در ۴ ساعت تایپ می‌کنند. اگر سرعت مهدی دو برابر سرعت محمد باشد، در این صورت هر یک از آن‌ها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟**	۱/۲۵
	ادامهٔ سؤالات در صفحهٔ بعد	

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

آزمون شماره ۳

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۱۰/۰۷**	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **یازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۸	در شکل مقابل، ابتدا تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و سپس مقادیر مجهول x و y را مشخص کنید. 	۱/۵
۹	در شکل مقابل، مستطیل ABCD مفروض است. اگر $AB=۳\sqrt{۱۰}$ و $BH=۹$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط‌های خواسته شده را به‌دست آورید. $AH=?$ $BD=?$ $BC=?$ 	۲/۲۵
۱۰	با فرض $f(x)=\frac{۳-۷x}{۵}$: الف) ضابطهٔ وارون تابع f را به‌دست آورید. ب) مقدار $f^{-۱}(۵)$ را تعیین کنید.	۱
۱۱	دو تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ و $g(x)=\frac{۲x-۱}{\sqrt{x+۱}}$ مفروض‌اند: الف) دامنه و ضابطهٔ تابع $(\frac{f}{g})(x)$ را بیابید. ب) حاصل $(\sqrt{۳f}\times\sqrt{۲g})(-\frac{۱}{۲})$ را به‌دست آورید.	۲/۲۵
۱۲	در شکل مقابل، نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع $y=-۲f(x-۱)$ را رسم کنید. 	۱/۵
۱۳	در دایره‌ای به شعاع ۹ سانتی‌متر، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمانی به طول ۶ سانتی‌متر، چند رادیان است؟	۰/۵
	موفق باشید.	۲۰

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۱۰/۰۷**	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **یازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۱۰ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌نامه	نمره
۱		۰/۷۵

مصحح شو:

الف) درست (۰/۲۵)　　ب) نادرست (۰/۲۵)　　پ) نادرست (۰/۲۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف) شیب دو خط $\ell_۱ : ۵x - ۱۲y + ۸ = ۰$ و $\ell_۲ : -۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰$ باهم برابر است، بنابراین دو خط باهم موازی هستند.

$$\ell_۱ : ۵x - ۱۲y + ۸ = ۰ \Rightarrow ۱۲y = ۵x + ۸ \Rightarrow y = \frac{۵}{۱۲}x + \frac{۸}{۱۲} \Rightarrow m_۱ = \frac{۵}{۱۲}$$

$$\ell_۲ : -۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} -۵x + ۱۲y + ۵ = ۰ \Rightarrow ۱۲y = ۵x - ۵ \Rightarrow y = \frac{۵}{۱۲}x - \frac{۵}{۱۲} \Rightarrow m_۲ = \frac{۵}{۱۲}$$

ب) دو تابع $f(x) = x - ۱$ و $g(x) = \frac{x^۲ - ۱}{x + ۱}$ با هم برابر نیستند، چرا که دامنهٔ دو تابع با هم برابر نیست.

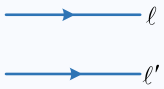
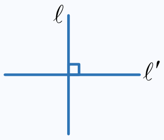
$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ D_g = \mathbb{R} - \{-۱\} \end{cases}$$

پ) انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۸\pi}{۵}$ رادیان در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

$D = \frac{۸\pi}{۵} \times \frac{۱۸۰^\circ}{\pi} = \frac{۸ \times ۱۸۰^\circ}{۵} = ۲۸۸^\circ \Rightarrow$ انتهای کمان زاویهٔ ۲۸۸° در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی قرار دارد.

الف) وضعیت دو خط نسبت به هم:

اگر m و m′ به‌ترتیب شیب خط‌های ℓ و ℓ' باشند، داریم:

$m = m'$	$m.m' = -۱$	$m \neq m'\ ,\ m.m' \neq -۱$
دو خط ℓ و ℓ' باهم موازی‌اند	دو خط ℓ و ℓ' بر هم عمودند.	دو خط ℓ و ℓ' متقاطع و غیرعمودند.
		

ب) تساوی دو تابع:

دو تابع f و g را باهم برابر می‌نامیم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

ـ دامنهٔ توابع f و g باهم برابر باشند.

ـ برای هر x از دامنهٔ یکسان، $f(x) = g(x)$ باشد.

به‌عبارت دیگر، دو تابع f و g زمانی باهم برابرند که دامنهٔ هر دو تابع (قبل از ساده کردن) و ضابطهٔ آن‌ها (بعد از ساده کردن) باهم برابر باشند،

به‌عنوان مثال، دو تابع $f(x) = x - ۲$ و $g(x) = \frac{x^۲ - ۴}{x + ۲}$ با هم برابر نیستند، چرا که $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{-۲\}$ است.

۲

۱/۲۵

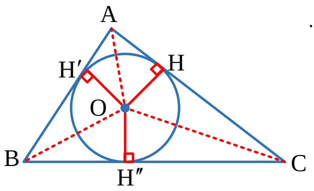
مصحح شو:

الف) نیمساز زاویه‌های مثلث (۰/۲۵)　　ب) $y_S = ۳$ (۰/۲۵)

پ) نیمساز ناحیهٔ اول و سوم $(y = x)$ (۰/۲۵)　　ت) -۷۲ (۰/۲۵)، $\frac{۷\pi}{۴}$ (۰/۲۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف) مرکز دایره‌ای که داخل مثلث بوده و بر اضلاع آن مماس است، محل برخورد نیمساز زاویه‌های مثلث می‌باشد.



$$\begin{cases} O \text{ روی نیمساز زاویهٔ } A \Rightarrow OH = OH' \\ O \text{ روی نیمساز زاویهٔ } B \Rightarrow OH' = OH'' \end{cases} \Rightarrow OH = OH''$$

توجه کنید که OH، OH' و OH'' شعاع دایره می‌باشند.

ب) برای پیدا کردن بیشترین مقدار تابع $f(x) = -۲x^۲ + ۸x - ۵$ به دو روش می‌توان عمل کرد:

روش اول: استفاده از رابطهٔ $y_S = -\frac{\Delta}{۴a}$:

$$y_S = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{b^۲ - ۴ac}{۴a} = -\frac{(۸)^۲ - ۴(-۲)(-۵)}{۴(-۲)} = -\frac{۶۴ - ۴۰}{-۸} = \frac{۲۴}{۸} = ۳$$

روش دوم: جای‌گذاری $x_S = -\frac{b}{۲a}$ در ضابطهٔ تابع:

$$x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۸}{۲(-۲)} = \frac{-۸}{-۴} = ۲ \Rightarrow f(۲) = -۲(۲)^۲ + ۸(۲) - ۵ = -۸ + ۱۶ - ۵ = ۳$$

پ) برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است، قرینهٔ نمودار آن را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم $(y = x)$ رسم کنیم.

ت)

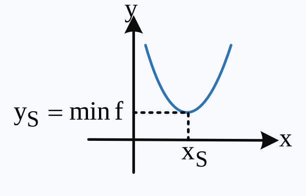
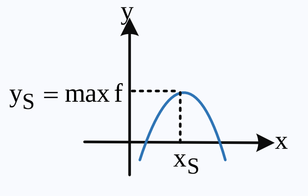
$$\begin{cases} -\frac{۲\pi}{۵} \times \frac{۱۸۰^\circ}{\pi} = -\frac{۲ \times ۱۸۰^\circ}{۵} = -۷۲^\circ \\ ۳۱۵^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰^\circ} = \frac{۳۱۵^\circ \times \pi}{۱۸۰^\circ} = \frac{۷\pi}{۴}\text{rad} \end{cases}$$

۲۰شو

۱) بیشترین مقدار یا کمترین مقدار یک تابع درجه ۲:

	$f(x) = ax^۲ + bx + c$	$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$	$f(x) = a(x-h)^۲ + k$
طول رأس	$x_S = -\frac{b}{۲a}$	$x_S = \frac{\alpha + \beta}{۲}$	$x_S = h$
عرض رأس	$y_S = f(-\frac{b}{۲a}) = -\frac{\Delta}{۴a}$	$y_S = f(\frac{\alpha + \beta}{۲})$	$y_S = k$

توجه کنید که منظور از بیش‌ترین مقدار (max) و یا کم‌ترین مقدار (min) یک سهمی، همان عرض رأس سهمی (y_S) است که با توجه به علامت a در تابع درجه دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ داریم:

$a > ۰$	$a < ۰$
	

۲) تبدیل درجه به رادیان و بالعکس:

ـ اگر زاویه‌ای برحسب درجه باشد، برای تبدیل آن به رادیان، آن زاویه را در $\frac{\pi}{۱۸۰^\circ}$ ضرب می‌کنیم.

ـ اگر زاویه‌ای برحسب رادیان باشد، برای تبدیل آن به درجه، آن زاویه را در $\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}$ ضرب می‌کنیم.

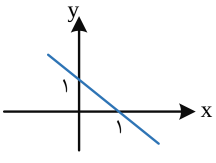
۳ — ۱

مصحح شو:

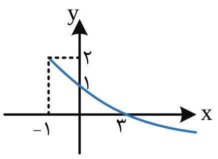
الف) گزینهٔ «۳» (۰/۵) ب) گزینهٔ «۱» (۰/۵)

بررسی دقیق‌تر:

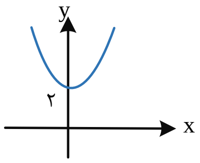
ابتدا هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:



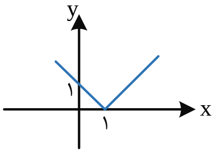
$f(x)=-x+۱$



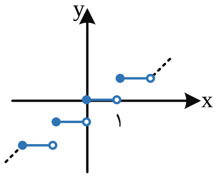
$f(x)=۲-\sqrt{x+۱}$



$f(x)=x^۲+۲$



$f(x)=|x-۱|$



$f(x)=[x]$

همان‌طور که مشخص است، توابع $f(x)=-x+۱$ و $f(x)=۲-\sqrt{x+۱}$، در دامنهٔ تعریف خود یک‌به‌یک هستند. توجه داشته باشید که یک تـابع در صورتی یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور xها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

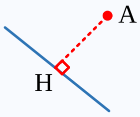
ب) فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,-۴)$ از خط $\ell: ۲x+y=۵$ برابر است با:

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲(۷)-۴-۵|}{\sqrt{(۲)^۲+(۱)^۲}}=\frac{|۱۴-۹|}{\sqrt{۵}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۵\sqrt{۵}}{۵}=\sqrt{۵}$$

فاصلهٔ نقطه از خط:

برای پیدا کردن فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ از خط $ax+by+c=۰$، از رابطهٔ زیر کمک می‌گیریم:

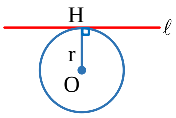
$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$



۴ — ۱

مصحح شو:

چون خط $\ell: ۴x-۳y=۲$ بر دایره‌ای به مرکز $O(۲,-۳)$ مماس است، بنابراین با توجه به شکل زیر می‌توان گفت که فاصلهٔ مرکز دایره تـا خـط ℓ، بـا شعاع دایره برابر است، پس:



$$r=OH=\underbrace{\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}_{(۰/۵)}=\underbrace{\frac{|۴(۲)-۳(-۳)-۲|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}}_{(۰/۲۵)}=\frac{|۸+۹-۲|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۵}{۵}=۳\ (۰/۲۵)$$

۵ — ۱/۵

مصحح شو:

می‌دانیم که α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-۵x-۱=۰$ می‌باشند، پس:

$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها}: S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(-۵)}{۲}=\frac{۵}{۲}\ (۰/۲۵)\\ \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}: P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۱}{۲}\ (۰/۲۵)\end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{\alpha\beta}}_{(۰/۵)}=\underbrace{\frac{(\frac{۵}{۲})^۲-۲(-\frac{۱}{۲})}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۲۵}{۴}+۱}{-\frac{۱}{۲}}}_{(۰/۲۵)}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{۲۹}{۴}}{-\frac{۱}{۲}}=-\frac{۲۹}{۲}\ (۰/۲۵)$$

۲۰ شو

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم:

اگر α و β، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، داریم:

$$* \ \alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P$$

$$* \ \alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳PS$$

$$* \ \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{(\alpha+\beta)+۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}$$

$$* \ |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$* \ \frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}$$

$$* \ \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{S^۲-۲P}{P}$$

۶ — ۴/۲۵

مصحح شو:

الف) ابتدا $x^۲$ را برابر t فرض می‌کنیم:

$$x^۴-۹x^۲+۸=۰\xrightarrow{x^۲=t}t^۲-۹t+۸=۰\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=x^۲=۱\ (۰/۲۵)\\ t=x^۲=۸(۰/۲۵)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm۱\ \ (۰/۵)\\ x=\pm\sqrt{۸}\ \text{یا}\ x=\pm۲\sqrt{۲}\quad(۰/۵)\end{cases}$$

ب) طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=۲$$

$$(x+\cancel{\sqrt{x}})+(x-\cancel{\sqrt{x}})+۲\sqrt{\underbrace{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}_{\text{مزدوج}}}=۴\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow\underbrace{۲x+۲\sqrt{x^۲-x}=۴}_{(۰/۲۵)}\xrightarrow{\div۲}\underbrace{x+\sqrt{x^۲-x}=۲\Rightarrow\sqrt{x^۲-x}=۲-x}_{(۰/۲۵)}$$

حال مجدداً طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\underbrace{(x^۲-x)=(۲-x)^۲}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\cancel{x^۲}-x=۴-۴x+\cancel{x^۲}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow ۳x=۴ \Rightarrow x=\frac{۴}{۳}\ (۰/۲۵)$$

پ) می‌دانیم که اگر $a\in\mathbb{Z}$ باشد، در این صورت، $[x+a]=[x]+a$ است، پس:

$$[x]+[x-۱]=۳ \Rightarrow \underbrace{[x]+[x]-۱}_{(۰/۲۵)}=۳ \Rightarrow \underbrace{۲[x]=۴}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{\div ۲} [x]=۲\ (۰/۲۵)$$

از طرفی، می‌دانیم که اگر $a\in\mathbb{Z}$ باشد، در این صورت، داریم: $[x]=a \Rightarrow a\le x<a+۱$

$$[x]=۲ \Rightarrow ۲\le x<۳\ (۰/۲۵)$$

الف) حل معادله به کمک تغییر متغیر:

برای حل برخی از معادله‌ها، باید با استفاده از تغییر متغیر، آن معادله را به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل کرد. برای این منظور به روش زیر عمل می‌کنیم:

ـ ابتدا در معادلهٔ داده شده، به‌جای یک عبارت برحسب x، از یک تغییر متغیر مناسب (مثلاً t) استفاده کرده و معادلهٔ داده شده را به یک معادلهٔ درجه دوم برحسب t تبدیل می‌کنیم.

ـ سپس معادلهٔ درجه دوم را حل کرده و مقدار (مقادیر) t را به‌دست می‌آوریم.

ـ در نهایت عبارتی را که آن را برابر t فرض کرده بودیم، برابر مقدار (مقادیر) t قرار می‌دهیم و با حل آن مجهول اصلی یعنی x را به‌دست می‌آوریم.

ب) حل معادلات رادیکالی:

برای حل یک معادلهٔ رادیکالی باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) یکی از رادیکال‌ها را در یک طرف معادله نگه می‌داریم و مابقی جمله‌ها را به طرف دیگر معادله منتقل می‌کنیم.

۲) طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم. *(معمولاً طرفین را به توان ۲ می‌رسونیم)*

(توجه داشته باشید که اگر با به توان رساندن طرفین معادله، مجدداً در معادله عبارت رادیکالی حضور داشته باشد، سعی می‌کنیم که با تکرار مراحل ۱ و ۲، کل معادله را از حالت رادیکالی خارج کنیم.)

۳) معادلهٔ به‌دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و آن را حل می‌کنیم و جواب (یا جواب‌های) معادله را به‌دست می‌آوریم.

۴) جواب(های) به‌دست آمده را در معادلهٔ اصلی آزمایش می‌کنیم و جواب‌هایی را قبول می‌کنیم که اولاً در دامنهٔ تعریف متغیر معادله قرار داشته باشند و ثانیاً در معادلهٔ اصلی صدق کنند.

پ) تابع جزء صحیح و برخی از خواص آن:

برای هر عدد حقیقی مانند x، جزء صحیح آن، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم.

به‌عنوان مثال، $[۳/۱۴]=۳$ و $[-۲/۸]=-۳$ است. به‌عبارت دیگر:

$$n\le x<n+۱ \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} [x]=n$$

برخی از خواص جزء صحیح:

۱) $[x]=a \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} a\le x<a+۱$

۲) $[x+a]=[x]+a\,;a\in\mathbb{Z}$

۳) $۰\le x-[x]<۱ \xrightarrow{\text{به‌طور کلی}} ۰\le f(x)-[f(x)]<۱$

۴) $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & ;\ x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & ;\ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

۵) $[x]\le a \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} x<a+۱$

۶) $[x]\ge a \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} x\ge a$

۷ | ۱/۲۵

مصحح شو:

می‌دانیم که سرعت مهدی دو برابر سرعت محمد است، حال فرض می‌کنیم که مهدی، متن را در x ساعت تایپ می‌کند، بنابراین، محمد متن را در ۲x ساعت تایپ خواهد کرد. پس نتیجه می‌گیریم که مهدی در یک ساعت، $\frac{۱}{x}$ کار را انجام می‌دهد و محمد نیز در یک ساعت، $\frac{۱}{۲x}$ کار را انجام خواهد داد. از طرفی می‌دانیم که اگر محمد و مهدی، با هم کار کنند، تایپ متن را در ۴ ساعت انجام خواهند داد، بنابراین، هر دو آن‌ها با هم، در یک ساعت، $\frac{۱}{۴}$ کل کار را انجام می‌دهند. پس:

$$\underbrace{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x}=\frac{۱}{۴}}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{\frac{۲+۱}{۲x}=\frac{۱}{۴}}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow ۲x=۱۲\Rightarrow x=۶\ (۰/۲۵)$$

بنابراین:

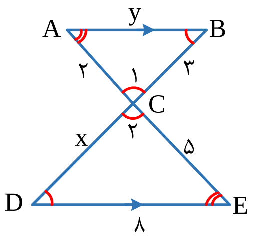
ـ مهدی به تنهایی، کار را در $x=۶$ ساعت انجام می‌دهد. (۰/۲۵)

ـ محمد به تنهایی، کار را در $۲x=۱۲$ ساعت انجام می‌دهد. (۰/۲۵)

۸ | ۱/۵

مصحح شو:

با توجه به شکل مقابل و به کمک خطوط موازی و مورب داریم:



$$\begin{cases}C\hat{A}B=C\hat{E}D\\ C\hat{B}A=C\hat{D}E\end{cases}\Rightarrow C\overset{\triangle}{A}B\sim C\overset{\triangle}{D}E$$ (بنا به حالت دو زاویه برابر) (۰/۵)

راهنمای مصحح: اگر زاویهٔ C با یکی از زوایای مورب در نظر گرفته شود، نمره تعلق می‌گیرد.

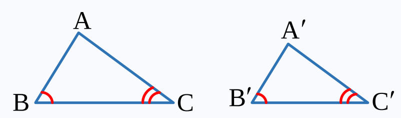
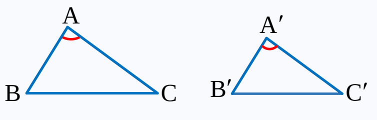
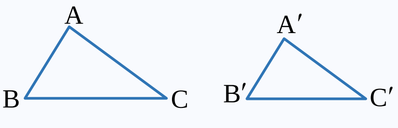
حال نسبت اضلاع متناظر را در دو مثلث متشابه، تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{AC}{CE}=\frac{BC}{CD}=\frac{AB}{DE}\ (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{x}=\frac{y}{۸}}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{x}\Rightarrow ۲x=۱۵\Rightarrow x=\frac{۱۵}{۲}\ (۰/۲۵)\\ \frac{۲}{۵}=\frac{y}{۸}\Rightarrow ۵y=۱۶\Rightarrow y=\frac{۱۶}{۵}\ (۰/۲۵)\end{cases}$$

حالت‌های تشابه دو مثلث:

با استفاده از قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها می‌توان سه قضیهٔ بعدی را نتیجه گرفت که این قضایا حالت‌های تشابه دو مثلث را بیان می‌کنند:

هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث به حالت دو زاویهٔ برابر (زز) متشابه‌اند.	$\begin{cases}\hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{cases}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C\sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$	
هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب بوده و زاویهٔ بین آن‌ها باهم برابر باشد، آن دو مثلث به حالت دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر (ضزض) متشابه‌اند.	$\begin{cases}\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}\\ \hat{A}=\hat{A}'\end{cases}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C\sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$	
هرگاه اندازهٔ سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث به حالت سه ضلع متناسب (ضضض) متشابه‌اند.	$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C\sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$	

۹

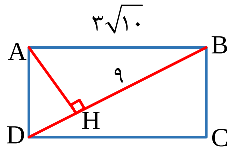
مصحح شو:

با توجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

AH = ?

BD = ?

BC = ?



$$A\overset{\triangle}{B}H:\underbrace{(AB)^۲=(AH)^۲+(BH)^۲}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{(۳\sqrt{۱۰})^۲=AH^۲+(۹)^۲}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow AH^۲=۹۰-۸۱=۹\Rightarrow AH=۳\ (۰/۲۵)$$

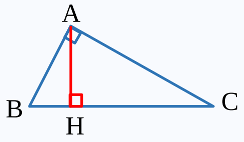
$$A\overset{\triangle}{B}D:\underbrace{(AB)^۲=BH\times BD}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{(۳\sqrt{۱۰})^۲=۹\times BD}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow BD=\frac{۹۰}{۹}=۱۰\ (۰/۲۵)$$

$$A\overset{\triangle}{B}D:(AD)^۲=\underbrace{\underbrace{DH}_{BD-BH}}_{(۰/۲۵)}\times BD\Rightarrow\underbrace{(AD)^۲=(۱۰-۹)\times۱۰=۱۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow AD=\sqrt{۱۰}\Rightarrow BC=\sqrt{۱۰}\ (۰/۲۵)$$

راهنمای مصحح: اگر طول BC به کمک رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $B\overset{\triangle}{D}C$ به‌دست بیاید، نمره تعلق می‌گیرد.

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

در هر مثلث قائم‌الزاویه، اگر ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، داریم:



- $AH\times BC=AB\times AC$
- $AB^۲=BH\times BC$
- $AC^۲=CH\times BC$
- $AH^۲=BH\times CH$

۲/۲۵

۱۰

مصحح شو:

الف)

$$y=\frac{۳-۷x}{۵}\Rightarrow\underbrace{۳-۷x=۵y\Rightarrow۷x=۳-۵y}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow x=\frac{۳-۵y}{۷}(۰/۲۵)$$

حال جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=f^{-۱}(x)=\frac{۳-۵x}{۷}\ (۰/۲۵)$$

ب) برای محاسبهٔ $f^{-۱}(۵)$، در ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$، $x=۵$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f^{-۱}(۵)=\frac{۳-۵(۵)}{۷}=\frac{۳-۲۵}{۷}=\frac{-۲۲}{۷}\ (۰/۲۵)$$

روش دوم: می‌دانیم که اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه: $f(\alpha)=\beta\Leftrightarrow f^{-۱}(\beta)=\alpha$

پس به‌جای محاسبهٔ $f^{-۱}(۵)=k$، می‌توان $f(k)=۵$ را به‌دست آورد.

$$f(x)=\frac{۳-۷x}{۵}\xrightarrow{f(k)=۵}\frac{۳-۷k}{۵}=۵\Rightarrow۳-۷k=۲۵\Rightarrow۷k=۳-۲۵\Rightarrow k=\frac{-۲۲}{۷}$$

راهنمای مصحح: اگر حاصل $f^{-۱}(۵)$ به روش دوم به‌دست بیاید نمره تعلق می‌گیرد.

۱) به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون:

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون تابع یک‌به‌یک $f(x)$ به روش زیر عمل می‌کنیم:

۱) ابتدا برد تابع $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم و به‌عنوان دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ در نظر می‌گیریم.

۲) سپس از معادلهٔ $y=f(x)$، x را برحسب y تعیین کرده و با تبدیل y به x، ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

۱

۲) ویژگی‌های تابع وارون:

۱) دامنهٔ تابع f با برد تابع $f^{-۱}$ برابر است و همچنین برد تابع f نیز با دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ برابر است.

$$\boxed{\begin{array}{l} D_f = R_{f^{-۱}} \\ R_f = D_{f^{-۱}} \end{array}}$$

۲) نمودار تابع f و تابع $f^{-۱}$، نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم $(y = x)$ متقارن هستند.

۳) اگر نقطهٔ (a, b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، در این صورت نقطهٔ (b, a) روی نمودار تابع $f^{-۱}$ قرار دارد، به‌عبارت دیگر:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-۱}$$

۱۱

۲/۲۵

مصحح شو:

الف) ابتدا دامنهٔ دو تابع $f(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ و $g(x) = \frac{۲x - ۱}{\sqrt{x + ۱}}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۱ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱ \Rightarrow D_f : [-۱, ۱] \ (۰/۲۵) \\ x + ۱ > ۰ \Rightarrow x > -۱ \Rightarrow D_g : (-۱, +\infty) \ (۰/۲۵) \end{cases}$$

بنابراین دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ برابر است با:

$$\underbrace{D_{\frac{f}{g}} : D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{[-۱, ۱] \cap (-۱, +\infty)}_{(-۱,۱]} - \underbrace{\left\{x \middle| \frac{۲x - ۱}{\sqrt{x + ۱}} = ۰\right\}}_{x = \frac{۱}{۲}}$$

$$D_{\frac{f}{g}} : (-۱, ۱] - \{\frac{۱}{۲}\} = (-۱, \frac{۱}{۲}) \cup (\frac{۱}{۲}, ۱] \ (۰/۵)$$

و ضابطهٔ تابع $\frac{f}{g}$ نیز برابر است با:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{۱ - x^۲}}{\frac{۲x - ۱}{\sqrt{x + ۱}}} = \frac{(\sqrt{۱ - x} \times \sqrt{۱ + x}) \times \sqrt{x + ۱}}{۲x - ۱} = \frac{(x + ۱)\sqrt{۱ - x}}{۲x - ۱} \ (۰/۵)$$

ب) حاصل $(\sqrt{۳}f \times \sqrt{۲}g)(-\frac{۱}{۲})$ برابر است با:

$$A = \sqrt{۳}f(-\frac{۱}{۲}) \times \sqrt{۲}g(-\frac{۱}{۲}) = (\sqrt{۳} \times \sqrt{۱ - (-\frac{۱}{۲})^۲}) \times (\sqrt{۲} \times \frac{۲(-\frac{۱}{۲}) - ۱}{\sqrt{-\frac{۱}{۲} + ۱}}) \ (۰/۲۵)$$

$$A = (\sqrt{۳} \times \sqrt{\frac{۳}{۴}}) \times (\sqrt{۲} \times \frac{-۲}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}) = (\frac{\sqrt{۳} \times \sqrt{۳}}{۲}) \times (\frac{-۲\sqrt{۲}}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}) = \frac{۳}{۲} \times -۴ = -۶ \ (۰/۲۵)$$

الف) دامنهٔ توابع رادیکالی:

برای پیدا کردن دامنهٔ توابع رادیکالی، با توجه به فرجهٔ رادیکال داریم:

ـ اگر فرجهٔ رادیکال فرد باشد، دامنهٔ تابع با دامنهٔ عبارت زیر رادیکال برابر است به‌عبارت دیگر، رادیکال فرجهٔ فرد را نادیده می‌گیریم و فقط دامنهٔ عبارت زیر رادیکال را به‌دست می‌آوریم:

$$\boxed{f(x) = \sqrt[\text{فرد}]{g(x)} \Rightarrow D_f = D_g}$$

ـ اگر فرجهٔ رادیکال زوج باشد، برای پیدا کردن دامنهٔ تابع، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) دامنهٔ عبارت زیر رادیکال را به‌دست می‌آوریم. (D_g)

۲) عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم و مجموعه جواب آن را به‌دست می‌آوریم. $(g(x)\geq ۰)$، دقت کنین که اگر رادیکال با فرجهٔ زوج در مخرج کسر باشد، باید عبارت زیر رادیکال رو بزرگ‌تر از صفر بذاریم. (خب معلومه دیگه، مخرج کسر که نمیتونه صفر باشه!)

۳) از محدوده‌های به‌دست آمده در مراحل ۱ و ۲، اشتراک می‌گیریم:

$$\boxed{f(x)=\sqrt[\text{زوج}]{g(x)}\Rightarrow D_f=\left\{x\,\middle|\,x\in D_g,g(x)\geq ۰\right\}}$$

ب) اعمال جبری بین توابع:

اگر توابع f و g به ترتیب دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، در این صورت، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم و ... این توابع را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

عملیات	ضابطه	دامنه
جمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g$
تفریق	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g$
ضرب	$(f.g)(x)=f(x).g(x)$	$D_{f.g}=D_f\cap D_g$
تقسیم	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)};(g(x)\neq ۰)$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}$
توان	$(f^{۲})(x)=f(x).f(x)$	$D_{f^{۲}}=D_f$
ضرب در عدد	$(kf)(x)=kf(x)$	$D_{kf}=D_f$

۱۲

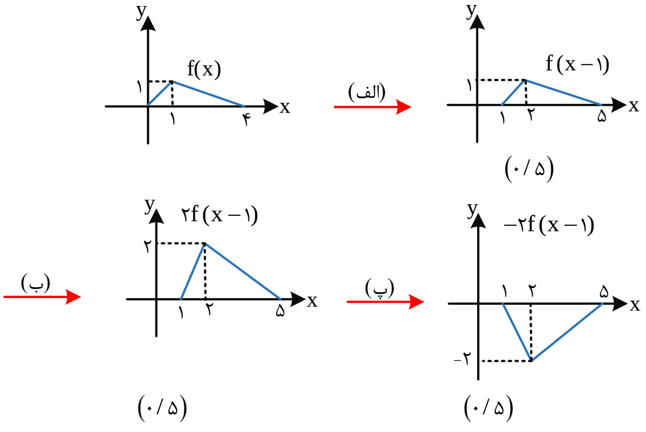
مصحح شو:

برای رسم نمودار تابع $y=-۲f(x-۱)$، مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

الف) ابتدا نمودار تابع f را در راستای محور xها به اندازهٔ یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.

ب) سپس در نمودار حاصل شده، عرض تمامی نقاط را دو برابر می‌کنیم.

پ) در نهایت نمودار تابع مرحلهٔ قبل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



۱/۵

انتقال توابع:

نمودار جدید $(a, k > 0)$	توضیحات و نحوهٔ رسم
$f(x+a)$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور xها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x-a)$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور xها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x)+a$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور yها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x)-a$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور yها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

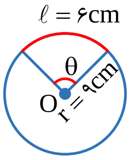
۱۳

مصحح شو:

می‌دانیم که شعاع دایره برابر ۹cm و اندازهٔ کمان مقابل به زاویهٔ مرکزی نیز برابر ۶cm است، پس:

$$\ell = r\theta \ (۰/۲۵)$$

$$۶ = ۹ \times \theta \Rightarrow \theta = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳} \text{rad} \ (۰/۲۵)$$

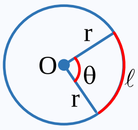


۰/۵

طول کمان:

همواره در یک دایره به شعاع r، بین اندازهٔ یک زاویه مانند θ برحسب رادیان و طول کمان (ℓ) روبه‌رو به آن زاویه، رابطهٔ زیر برقرار است. *(حواست باشه که θ برحسب رادیانه)*

$$\boxed{\ell = r\theta}$$

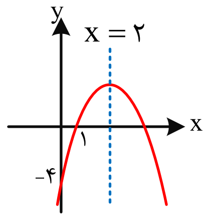
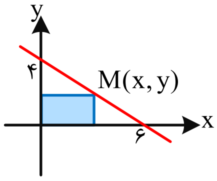


موفق باشید.

۲۰

آزمون شماره ۴

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۳/۰۸/۲۵**	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **یازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	تعداد صفحات: **۱ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی	**گروه آموزشی ماز**		

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین‌حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۱	درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۲,۱)$ از خط $۴x-۳y+۱=۰$ برابر ۲ است. ب) بیشترین مقدار تابع $y=-x^۲-۲x+۱$ برابر -۲ است.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید. الف) فاصلهٔ دو خط موازی $y-\sqrt{۳}x=۲$ و $\sqrt{۳}y-۳x+۶=۰$ برابر .... است. ب) معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌های آن $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ باشد، به‌صورت .... است.	۲
۳	مثلثی با رئوس $A(۳,۴)$، $B(۲,۱)$ و $C(۵,۰)$ مفروض است: الف) طول میانهٔ BM را محاسبه کنید. ب) معادلهٔ میانهٔ BM را به‌دست آورید.	۲/۷۵
۴	نقطهٔ $A(۵,۱)$ یکی از رأس‌های مربعی است که یکی از اضلاع آن بر خط $y-۳x=-۲$ منطبق است. مساحت مربع را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۵	اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $۴x^۲-۵x-۱=۰$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ را به‌دست آورید.	۲
۶	ضابطهٔ تابع درجه دوم مربوط به نمودار مقابل را بنویسید. 	۲
۷	با توجه به نمودار زیر، بیشترین مساحت ممکن مستطیل سایه‌زده را بیابید. 	۲/۵
۸	هر یک از معادله‌های زیر را حل کنید. الف) $\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{x-۱}{x-۳}$ ب) $\sqrt{x+۳}+\frac{۱}{\sqrt{x+۳}}=۲$ پ) $(x^۲-۲x)^۲-(x^۲-۲x)=۲$	۵
۹	فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از خط d باشد، روش رسم مثلث متساوی‌الساقینی به رأس A که قاعدهٔ آن منطبق بر خط d و مساحت آن ۸ سانتی‌متر مربع باشد را توضیح دهید.	۱/۵
	موفق باشید	۲۰

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۳/۰۸/۲۵**	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **یازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	تعداد صفحات: **۶ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی	**گروه آموزشی ماز**		

ردیف | **پاسخ‌نامه** | **نمره**

۱ — نمره: ۱

مصحح شو:

الف) درست (۰/۵)   ب) نادرست (۰/۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف) فاصلهٔ نقطه $A(-۲,۱)$ از خط $۴x-۳y+۱=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|۴(-۲)-۳(۱)+۱|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{|-۸-۳+۱|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{|-۱۰|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

ب) بیشترین مقدار تابع $y=-x^۲-۲x+۱$ به ازای $x_S=-\frac{b}{۲a}=-۱$ رخ می‌دهد:

$$y=-x^۲-۲x+۱\xrightarrow{x_S=-۱}y_S=-(-۱)^۲-۲(-۱)+۱=-۱+۲+۱=۲$$

البته می‌توانستیم مستقیماً از رابطهٔ $y_S=-\frac{\Delta}{۴a}$، برای پیدا کردن بیشترین مقدار سهمی استفاده کنیم:

$$y_S=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{(-۲)^۲-۴(-۱)(۱)}{۴(-۱)}=-\frac{۴+۴}{-۴}=\frac{۸}{۴}=۲$$

۲ — نمره: ۲

مصحح شو:

الف) $\sqrt{۳}+۱$ (۱)   ب) $x^۲-۳x+۱$ (۱)

بررسی دقیق‌تر:

الف) برای پیدا کردن فاصلهٔ دو خط موازی $y-\sqrt{۳}x=۲$ و $\sqrt{۳}y-۳x+۶=۰$ به دو روش می‌توانیم عمل کنیم:

روش اول: یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ آن را از خط دیگر به‌دست می‌آوریم. حال اگر نقطهٔ $(۰,۲)$ را روی خط $y-\sqrt{۳}x=۲$ در نظر بگیریم. فاصلهٔ این نقطه از خط $\sqrt{۳}y-۳x+۶=۰$، همان فاصلهٔ این دو خط موازی است، پس:

$$d=\frac{|۲\sqrt{۳}-۳(۰)+۶|}{\sqrt{(\sqrt{۳})^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۲\sqrt{۳}+۶}{\sqrt{۳+۹}}=\frac{۲\sqrt{۳}+۶}{۲\sqrt{۳}}=۱+\frac{۶}{۲\sqrt{۳}}=۱+\frac{۳}{\sqrt{۳}}=۱+\sqrt{۳}$$

روش دوم: می‌دانیم که فاصلهٔ بین دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطهٔ $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به‌دست می‌آید. بنابراین ابتدا هر دو معادله را به‌صورت استاندارد فوق می‌نویسیم (ضرایب x و y را در آن‌ها باید برابر کنیم):

$$\begin{cases}y-\sqrt{۳}x-۲=۰\\ \sqrt{۳}y-۳x+۶=۰\xrightarrow{\div\sqrt{۳}}y-\frac{۳}{\sqrt{۳}}x+\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۰\Rightarrow y-\sqrt{۳}x+۲\sqrt{۳}=۰\end{cases}$$

$$d=\frac{|۲\sqrt{۳}-(-۲)|}{\sqrt{۱^۲+(-\sqrt{۳})^۲}}=\frac{۲\sqrt{۳}+۲}{\sqrt{۱+۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}+۲}{۲}=\sqrt{۳}+۱$$

ب) می‌دانیم معادلهٔ درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P باشد را می‌توان به‌صورت $x^۲-Sx+P=۰$ نوشت، پس:

$$\begin{matrix}\alpha=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\\ \beta=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳\\ P=\alpha\beta=(\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲})(\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲})=\frac{۹-۵}{۴}=\frac{۴}{۴}=۱\end{cases}$$

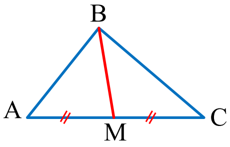
بنابراین معادلهٔ درجه دوم موردنظر برابر است با: $x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰$

۳

۲/۷۵

مصحح شو:

الف) با توجه به شکل زیر، برای پیدا کردن طول میانه BM، ابتدا باید مختصات نقطه وسط پاره‌خط AC (نقطه M) را پیدا کرده و سپس فاصلهٔ دو نقطهٔ B و M را محاسبه کنیم:



$$\begin{cases}A(۳,۴)\\ C(۵,۰)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overbrace{x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}}^{(۰/۲۵)}=\frac{۳+۵}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴\ (۰/۲۵)\\ \underbrace{y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۴+۰}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲\ (۰/۲۵)\end{cases}\Rightarrow M(۴,۲)\ \ (۰/۲۵)$$

$$BM=\sqrt{(x_M-x_B)^۲+(y_M-y_B)^۲}\ \ (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{BM=\sqrt{(۴-۲)^۲+(۲-۱)^۲}}_{(۰/۲۵)}=\sqrt{۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}\ (۰/۲۵)$$

ب) معادلهٔ میانه BM، با معادله خط گذرنده از دو نقطهٔ $B(۲,۱)$ و $M(۴,۲)$ برابر است، پس:

$$m_{BM}=\frac{y_M-y_B}{x_M-x_B}=\frac{۲-۱}{۴-۲}=\frac{۱}{۲}\ \ (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{y-y_B=m_{BM}(x-x_B)}_{(۰/۲۵)}\xrightarrow[m_{BM}=\frac{۱}{۲}]{B(۲,۱)}y-۱=\frac{۱}{۲}(x-۲)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x\ \ (۰/۲۵)$$

۲۰شو الف) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$AH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۲۰شو ب) مختصات وسط و اندازه پاره‌خط AB:

۱. اگر نقاط $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ دو سر پاره‌خط AB باشند، مختصات نقطهٔ وسط این پاره‌خط بر ابر است با:

$$\begin{cases}x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}\\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}\end{cases}\Rightarrow M=(x_M,y_M)$$

۲. فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

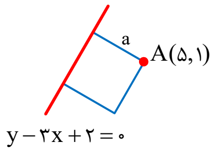
۴

۱/۲۵

مصحح شو:

اگر نقطهٔ $A(۵,۱)$ را در خط $y-۳x=-۲$ جایگذاری کنیم متوجه خواهیم شد که نقطهٔ A روی این خط قرار ندارد، بنابراین با توجه به شکل فرضی زیر، می‌توان گفت که فاصلهٔ نقطهٔ A از خط $y-۳x+۲=۰$ با طول ضلع مربع برابر است، پس:

$$a=\underbrace{\frac{|۱-۳(۵)+۲|}{\sqrt{۱^۲+(-۳)^۲}}}_{(۰/۵)}=\frac{|-۱۲|}{\sqrt{۱+۹}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۱۰}}\ \ (۰/۲۵)$$



بنابراین مساحت مربع برابر است با:

$$S=a^۲\Rightarrow S=\underbrace{(\frac{۱۲}{\sqrt{۱۰}})^۲}_{(۰/۲۵)}=\frac{۱۴۴}{۱۰}=\frac{۷۲}{۵}\ \text{یا}\ ۱۴/۴\ (۰/۲۵)$$

۵

مصحح شو:

می‌دانیم که α و β ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲-۵x-۱=۰$ هستند، پس:

$$\begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها}: \overbrace{S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}}^{(۰/۲۵)}=-\frac{(-۵)}{۴}=\frac{۵}{۴}\ (۰/۲۵) \\ \text{ضرب ریشه‌ها}: \underbrace{P=\alpha\beta=\frac{c}{a}}_{(۰/۲۵)}=\frac{-۱}{۴}(۰/۲۵) \end{cases}$$

حاصل خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\underbrace{\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{\alpha\beta}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{(\frac{۵}{۴})^۲-۲(-\frac{۱}{۴})}{-\frac{۱}{۴}}}_{(۰/۲۵)}=\frac{\frac{۲۵}{۱۶}+\frac{۱}{۲}}{-\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{۳۳}{۱۶}}{-\frac{۱}{۴}}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{۳۳\times۴}{۱۶}=-\frac{۳۳}{۴}\ (۰/۲۵)$$

۲۰ شو

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، در این صورت:

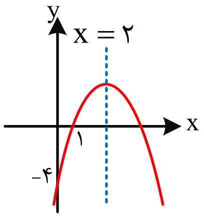
$$\begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها}: S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \\ \text{ضرب ریشه‌ها}: P=\alpha\beta=\frac{c}{a} \end{cases}$$

۲

۶

مصحح شو:

می‌دانیم که معادلهٔ یک سهمی به فرم $y=ax^۲+bx+c$ است، از طرفی با توجه به شکل زیر، سهمی از دو نقطه با مختصات $(۱,۰)$ و $(۰,-۴)$ عبور می‌کند، بنابراین این نقاط در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند:



$$(۰,-۴)\in y\Rightarrow a(۰)^۲+b(۰)+c=-۴\Rightarrow c=-۴\ (۰/۲۵)$$

$$(۱,۰)\in y\Rightarrow a(۱)^۲+b(۱)+c=۰\xrightarrow{c=-۴}a+b-۴=۰\Rightarrow \underbrace{a+b=۴}_{(۰/۲۵)}\ (I)$$

از طرفی، خط $x=۲$ محور تقارن سهمی است، پس:

$$x_S=۲\Rightarrow \underbrace{\frac{-b}{۲a}}_{(۰/۲۵)}=۲\Rightarrow \underbrace{b=-۴a}_{(۰/۲۵)}\ (II)$$

حال به کمک روابط (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} a+b=۴ \\ b=-۴a \end{cases}\Rightarrow a-۴a=۴\Rightarrow -۳a=۴\Rightarrow \underbrace{a=-\frac{۴}{۳}}_{(۰/۲۵)}\xrightarrow{b=-۴a}\underbrace{b=\frac{۱۶}{۳}}_{(۰/۲۵)}$$

در نتیجه معادلهٔ این سهمی به فرم $y=-\frac{۴}{۳}x^۲+\frac{۱۶}{۳}x-۴$ است. (۰/۵)

روش دوم: با توجه به خاصیت محور تقارن، ریشه دوم برابر ۳ است (۰/۲۵). پس معادله سهمی به‌صورت $\overbrace{y=a(x-۱)(x-۳)}^{(۰/۲۵)}$ خواهد بود. برای یافتن a از نقطه $(۰,-۴)$ استفاده می‌کنیم.

۲

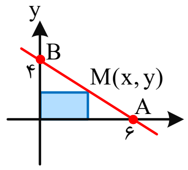
$$\underbrace{-۴=a(۰-۱)(۰-۳)}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow a=-\frac{۴}{۳} \quad (۰/۵)$$

$$\underbrace{y=-\frac{۴}{۳}(x-۱)(x-۳)}_{(۰/۲۵)}=-\frac{۴}{۳}(x^۲-۴x+۳)=\underbrace{-\frac{۴}{۳}x^۲+\frac{۱۶}{۳}x-۴}_{(۰/۵)}$$

۷ ۲/۵

مصحح شو:

با توجه به شکل زیر، نقطهٔ M روی خطی قرار دارد که از دو نقطهٔ $(۰,۴)$ و $(۶,۰)$ عبور می‌کند، بنابراین معادلهٔ این خط را پیدا می‌کنیم:



$$\begin{cases}A(۶,۰)\\B(۰,۴)\end{cases} \Rightarrow m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۴-۰}{۰-۶}=\frac{۴}{-۶}=\frac{-۲}{۳} \quad (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{y-y_A=m(x-x_A)}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow[m=-\frac{۲}{۳}]{A(۶,۰)} y-۰=-\frac{۲}{۳}(x-۶) \Rightarrow y=-\frac{۲}{۳}x+۴ \quad (۰/۲۵)$$

از طرفی مساحت مستطیل سایه‌زده برابر $S=xy$ است، پس:

$$\underbrace{S=xy}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{y=-\frac{۲}{۳}x+۴} S=x(-\frac{۲}{۳}x+۴) \Rightarrow S=-\frac{۲}{۳}x^۲+۴x \quad (۰/۵)$$

پس مساحت مستطیل، یک تابع درجه دوم برحسب x است که بیشترین مقدار آن به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ به‌دست می‌آید:

$$S(x)=-\frac{۲}{۳}x^۲+۴x$$

$$x_{max}=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲(-\frac{۲}{۳})}=۳ \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow S_{max}=-\frac{۲}{۳}(۳)^۲+۴(۳)=-۶+۱۲=۶ \quad (۰/۵)$$

۲۰ شو **بیشترین و کمترین مقدار یک تابع درجهٔ دوم:**

در برخی از سؤالات مربوط به تابع درجهٔ دوم، معادله یا نمودار یک تابع درجهٔ دوم را به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند که بیش‌ترین مقدار و یا کم‌ترین مقدار آن را به‌دست بیاوریم، اما در بعضی از سؤال‌ها ابتدا باید به کمک اطلاعات موجود در مسئله، تابع درجهٔ دوم را به‌صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ تشکیل داده و سپس با استفاده از رابطهٔ $y_S=f(-\frac{b}{۲a})=\frac{-\Delta}{۴a}$، بیش‌ترین مقدار و یا کم‌ترین مقدار آن را به‌دست بیاوریم.

۸ ۵

مصحح شو:

الف) $\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{x-۱}{x-۳}$

ابتدا همهٔ کسرها را به یک طرف منتقل کرده و سپس مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}-\frac{x-۱}{x-۳}=۰ \Rightarrow \frac{۲x(x+۴)+(x+۱)(x-۳)-(x-۱)(x+۴)}{(x-۳)(x+۴)} \quad (۰/۲۵)$$

$$=\frac{(۲x^۲+۸x)+(x^۲-۲x-۳)-(x^۲+۳x-۴)}{(x-۳)(x+۴)}=۰ \Rightarrow \frac{۲x^۲+۳x+۱}{(x-۳)(x+۴)}= \quad (۰/۲۵)$$

می‌دانیم یک کسر زمانی برابر صفر است که صورت آن برابر صفر باشد:

$$\underbrace{۲x^۲+۳x+۱=۰}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-۱ & \text{قابل قبول} \ (۰/۲۵) \\ x=-\frac{۱}{۲} & \text{قابل قبول} \ (۰/۲۵) \end{cases}$$

ب) $\sqrt{x+۳}+\frac{۱}{\sqrt{x+۳}}=۲$

ابتدا طرفین معادله را در $\sqrt{x+۳}$ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{\sqrt{x+۳}(\sqrt{x+۳}+\frac{۱}{\sqrt{x+۳}})}_{(۰/۲۵)}=۲(\sqrt{x+۳})\Rightarrow (x+۳)+۱=۲\sqrt{x+۳}\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \underbrace{x+۴=۲\sqrt{x+۳}}_{(۰/۲۵)}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}(x+۴)^۲=(۲\sqrt{x+۳})^۲\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x^۲+۸x+۱۶=۴(x+۳)\Rightarrow \underbrace{x^۲+۴x+۴=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow (x+۲)^۲=۰\Rightarrow x=-۲\ (۰/۲۵)$$

جواب، قابل قبول است چرا که در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند. (۰/۲۵)

پ) $(x^۲-۲x)^۲-(x^۲-۲x)=۲$

ابتدا عبارت $x^۲-۲x$ را برابر t فرض می‌کنیم:

$$\underbrace{t^۲-t=۲}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow t^۲-t-۲=۰\xrightarrow{\text{حل معادله}}\begin{cases}t=-۱\ (۰/۲۵)\\ t=۲\ (۰/۲۵)\end{cases}$$

می‌دانیم که $t=x^۲-۲x$ بود، پس:

$$\underbrace{x^۲-۲x=-۱}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\Rightarrow (x-۱)^۲=۰\Rightarrow x=۱\ (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{x^۲-۲x=۲}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow x^۲-۲x-۲=۰\xrightarrow{\Delta=۱۲}\begin{cases}x=\frac{۲+\sqrt{۱۲}}{۲}=\frac{۲+۲\sqrt{۳}}{۲}=۱+\sqrt{۳}\ (۰/۲۵)\\ x=\frac{۲-\sqrt{۱۲}}{۲}=\frac{۲-۲\sqrt{۳}}{۲}=۱-\sqrt{۳}\ (۰/۲۵)\end{cases}$$

برای حل یک معادلهٔ رادیکالی باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱. یکی از رادیکال‌ها را در یک طرف معادله نگه می‌داریم و مابقی جمله‌ها را به طرف دیگر معادله منتقل می‌کنیم.

۲. طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم. (معمولاً طرفین را به توان ۲ می‌رسونیم.)

(توجه داشته باشید که اگر با توان رساندن طرفین معادله، مجدداً در معادله عبارت رادیکالی حضور داشته باشد، سعی می‌کنیم که با تکرار مراحل ۱ و ۲، کل معادله را از حالت رادیکالی خارج کنیم.)

۳. معادلهٔ به‌دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و آن را حل می‌کنیم و جواب (یا جواب‌های) معادله را به‌دست می‌آوریم.

۴. جواب(های) به‌دست آمده را در معادلهٔ اصلی آزمایش می‌کنیم و جواب‌هایی را قبول می‌کنیم که اولاً در دامنهٔ تعریف متغیر معادله قرار داشته باشند و ثانیاً در معادلهٔ اصلی صدق کنند.

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

ابتدا مخرج هر یک از کسرها را (در صورت لزوم) به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم. (چندجمله‌ای)

طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج کسرها ضرب می‌کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود.

عبارت جبری به‌دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و معادلهٔ حاصل‌شده (معمولاً درجه ۲) را حل می‌کنیم.

در نهایت جواب‌های به‌دست آمده را در معادلهٔ اصلی امتحان می‌کنیم.

توجه کنید که جواب‌های به‌دست آمده زمانی قابل قبول خواهند شد که اولاً مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نکنند و ثانیاً این جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت داشته باشند (قسمت دوم رو متوجه نشدم! یعنی این که مثلاً اگر قراره با حل یه معادله طول یک شکل رو محاسبه کنیم، اندازهٔ این طول رو منفی به‌دست نیاوریم.)

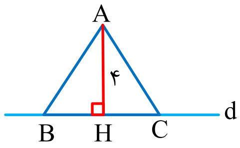
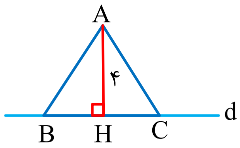
برای حل برخی از معادله‌ها، باید با استفاده از تغییر متغیر، آن معادلات را به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل کرد. برای این منظور به روش زیر عمل می‌کنیم:

برای حل برخی از معادله‌ها، باید با استفاده از تغییر متغیر، آن معادلات را به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل کرد، برای این منظور به روش زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا در معادلهٔ داده شده، به جای یک عبارت برحسب x، از یک تغییر متغیر مناسب (مثلاً t) استفاده کرده و معادلهٔ داده‌شده را به معادلهٔ درجه دوم برحسب t تبدیل می‌کنیم.

سپس معادلهٔ درجهٔ دوم را حل کرده و مقدار (مقادیر) t را به‌دست می‌آوریم.

در نهایت عبارتی را که آن را برابر t فرض کرده بودیم را برابر مقدار (مقادیر) t قرار می‌دهیم و با حل آن مجهول‌های اصلی یعنی x را به‌دست می‌آوریم.

۹	مصحح شو: می‌دانیم که مساحت مثلث $۸cm^۲$ است، پس با توجه به شکل زیر، داریم:  $S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times BC\times AH\ \ (۰/۲۵)$ $\underbrace{۸=\frac{۱}{۲}\times BC\times ۴}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow BC=۴\ (۰/۲۵)$ می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانه بر هم منطبق‌اند، پس: $BH=CH=\frac{BC}{۲}=۲\ (۰/۲۵)$ پس برای رسم این مثلث باید از نقطهٔ A خطی عمود بر خط d رسم کنیم تا نقطهٔ H به‌دست بیاید. (۰/۲۵) سپس به مرکز H و به شعاع ۲ سانتی‌متر کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه قطع کند. این نقاط همان رأس‌های B و C در مثلث هستند. (۰/۲۵) **روش دوم:** می‌دانیم که مساحت مثلث $۸cm^۲$ است، پس با توجه به شکل زیر، داریم:  $S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times BC\times AH\ \ (۰/۲۵)$ $\underbrace{۸=\frac{۱}{۲}\times BC\times ۴}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow BC=۴\ (۰/۲۵)$ می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانه بر هم منطبق‌اند، پس: $BH=CH=\frac{BC}{۲}=۲\ (۰/۲۵)$ حال در مثلث قائم‌الزاویه AHC به کمک قضیه فیثاغورس، داریم: $AC^۲=AH^۲+HC^۲\Rightarrow AC=\sqrt{۱۶+۴}=\sqrt{۲۰}\Rightarrow AC=۲\sqrt{۵}\ \ (۰/۲۵)$ بنابراین کافی است که کمانی به مرکز A و شعاع $۲\sqrt{۵}$ رسم کنیم تا خط d را در دو نقطه قطع کند. این نقاط همان رأس‌های B و C در مثلث ABC هستند. (۰/۲۵)	۱/۵
	موفق باشید	۲۰

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

آزمون شماره ۵

ماز

به نام خدا

سوالات آزمون نهایی درس: **ریاضی ۲**	تعداد صفحه: **۲**	رشته: **علوم تجربی**	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه – یازدهم	تاریخ آزمون: **۱۴۰۳/۰۹/۲۳**	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: **۴۰ دقیقه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی			**گروه آموزشی ماز**

<table>
<tr><th>ردیف</th><th>سؤالات (پاسخبرگ دارد)</th><th>نمره</th></tr>
<tr><td>۱</td><td>

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) خطوط $L:۲x-۳y+۳=۰$ و $T:۳x+۲y=۰$ برهم عمودند.

ب) معادله $\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۱}=۰$ فاقد ریشه حقیقی است.

پ) دامنه تابع $f(x)=\frac{x-۳}{x^۲-۹}$ به‌صورت $D_f=\mathbb{R}-\{-۳\}$ است.

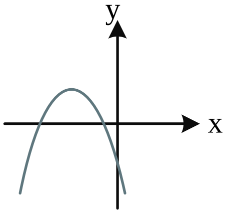
ت) توابع $f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$ و $g(x)=\frac{x^۲}{|x|}$ باهم برابرند.

</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۲</td><td>

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید.

الف) قرینه نقطه $A(۱,۲)$ نسبت به نقطه $B(-۱,۴)$، نقطهٔ .... است.

ب) در سهمی مقابل با ضابطهٔ $y=ax^۲+bx+c$، علامت $a\times b\times c$، .... است.



پ) هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به فاصله یکسان باشد آن نقطه روی .... آن پاره‌خط قرار دارد.

ت) اگر تساوی $\frac{b}{۸+b}=\frac{a}{۱۰+a}$ برقرار باشد، آن‌گاه نسبت $\frac{a}{b}$ برابر .... است.

</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۳</td><td>

خط $۳y+۴x=۱۸$ بر دایره‌ای به مرکز $O(۷,۵)$ مماس است. محیط دایره را به‌دست آورید.

</td><td>۲</td></tr>
<tr><td>۴</td><td>

زمینی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط این زمین ۲۰ متر باشد ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت زمین حداکثر مقدار ممکن گردد.

</td><td>۳.۵</td></tr>
<tr><td>۵</td><td>

الف) اگر مجموع ریشه‌های معادله $x^۲-(m+۲)x+۲m=۰$ برابر ۶ باشد، حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌دست آورید.

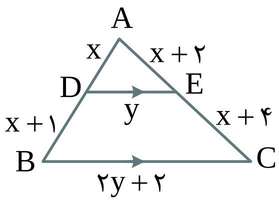
ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد.

</td><td>۳</td></tr>
<tr><td>۶</td><td>

برای انجام کاری، اگر طاها و یاسین باهم کار کنند می‌توانند در ۱۲ ساعت کار را تمام کنند. اگر سرعت کار طاها سه برابر یاسین باشد، یاسین به تنهایی در چند ساعت کار را تمام می‌کند؟

</td><td>۱.۷۵</td></tr>
<tr><td>۷</td><td>

در شکل مقابل $DE||BC$ می‌باشد. مقادیر x و y را محاسبه کنید.

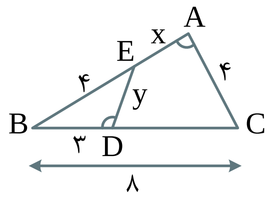


</td><td>۳</td></tr>
</table>

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

ماز آزمون شماره ۵

سوالات آزمون نهایی درس: **ریاضی ۲**	تعداد صفحه: **۲**	رشته: **علوم تجربی**	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه – یازدهم	تاریخ آزمون: **۱۴۰۳/۰۹/۲۳**	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: **۴۰ دقیقه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌نامه دارد)	نمره
۸	در شکل مقابل، $\hat{A}=B\hat{D}E$ است. مقادیر x و y را به‌دست آورید. 	۲.۷۵
۹	نمودار تابع $f(x)=-۲+\sqrt{x-۳}$ را به کمک انتقال رسم کرده و دامنه آن را بیابید.	۲
	موفق باشید.	۲۰

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: **ریاضی ۲**		رشته: **علوم‌تجربی**	
دوره دوم متوسطه – یازدهم	تاریخ آزمون: **۱۴۰۳/۰۹/۲۳**	ساعت شروع:	مدت زمان: **۴۰ دقیقه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	مصحح شو: الف) درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵) پ) نادرست (۰/۲۵) ت) درست (۰/۲۵) بررسی دقیق‌تر: الف) (صفحه ۴) ابتدا شیب دو خط را پیدا می‌کنیم: $L:۲x-۳y+۳=۰ \Rightarrow m_L=\frac{۲}{۳}$ $\Rightarrow m_L \times m_T=-۱$ $T:۳x+۲y=۰ \Rightarrow m_T=-\frac{۳}{۲}$ بنابراین دو خط L و T برهم عمودند. **با فرض این‌که $m_۱$ شیب خط $\ell_۱$ و $m_۲$ شیب خط $\ell_۲$ باشد در این صورت:** ـ اگر $m_۱=m_۲$ باشد آن‌گاه دو خط $\ell_۱$ و $\ell_۲$ باهم موازی‌اند. ـ اگر $m_۱\times m_۲=-۱$ باشد آن‌گاه دو خط $\ell_۱$ و $\ell_۲$ برهم عمودند. ب) (صفحه ۲۳) ابتدا حوزه تعریف معادله را پیدا می‌کنیم: $\begin{cases} ۱-x\ge ۰ \Rightarrow x\le ۱ \\ x-۱\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=۱$ بنابراین این معادله فقط به ازای $x=۱$ برقرار است و $x=۱$ تنها ریشه حقیقی معادله است. البته با روش به توان‌رسانی نیز می‌توان به جوابِ $x=۱$ رسید، ببینید: $\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۱}=۰ \Rightarrow \sqrt{۱-x}=-\sqrt{x-۱} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین به}} ۱-x=x-۱ \Rightarrow ۲x=۲ \Rightarrow x=۱$ پ) (صفحه ۵۰ و ۵۶) برای پیدا کردن دامنه تابع $f(x)=\frac{x-۳}{x^۲-۹}$، ابتدا ریشه‌های عبارت مخرج کسر را پیدا می‌کنیم: $x^۲-۹=۰ \Rightarrow x^۲=۹ \Rightarrow x=\pm ۳$ $D_f=\mathbb{R}-\{\text{ریشه(های) مخرج کسر}\} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm ۳\}$ توجه کنید که قبل از پیدا کردن دامنه تابع، حق ساده کردن ضابطه تابع را نداریم.	۱

دامنهٔ توابع گویا و توابع رادیکالی

* برای پیدا کردن دامنه توابع گویا به فرم $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ توابع چندجمله‌ای هستند، ریشه(های) عبارت مخرج کسر را (در صورت وجود) پیدا کرده و آن‌ها را از مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ حذف می‌کنیم. به عبارت دیگر:

$$D_f=\mathbb{R}-\{x \mid Q(x)=۰\}=\mathbb{R}-\{\text{ریشه(های) مخرج کسر}\}$$

* برای پیدا کردن دامنه توابع رادیکالی، با توجه به فرجهٔ رادیکال داریم:

اگر فرجه رادیکال **فرد** باشد، دامنهٔ تابع با **دامنه عبارت زیر رادیکال برابر** است. به عبارت دیگر، رادیکال فرجه فرد را نادیده می‌گیریم و فقط دامنه عبارت زیر رادیکال را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=\sqrt[\text{فرد}]{g(x)} \Rightarrow D_f=D_g$$

اگر فرجهٔ رادیکال **زوج** باشد، برای پیدا کردن دامنهٔ تابع، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) دامنهٔ عبارت زیر رادیکال را به‌دست می‌آوریم. (D_g)

۲) عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم و مجموعه جواب آن را به‌دست می‌آوریم. $(g(x)\geq ۰)$، دقت کنید که اگر رادیکال با فرجه زوج در مخرج کسر باشد، باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر از صفر بذاریم. *خب معلومه دیگه، مخرج کسر که نمی‌تونه صفر باشه!*

۳) از محدوده‌های به‌دست آمده در مراحل ۱ و ۲، اشتراک می‌گیریم.

$$f(x)=\sqrt[\text{زوج}]{g(x)} \Rightarrow D_f=\{x \mid x\in D_g, g(x)\geq ۰\}$$

ت) (صفحه ۵۱ و ۵۶)

ابتدا دامنه هر دو تابع f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ -x & x<۰ \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$g(x)=\frac{x^۲}{|x|} \Rightarrow |x|\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۰ \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$$

از آن‌جا که دامنه هر دو تابع f و g باهم برابر است بنابراین به سراغ بررسی برابری ضابطه‌ها می‌رویم. می‌دانیم که:

$$|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

بنابراین:

$$f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

$$g(x)=\frac{x^۲}{|x|} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^۲}{x}=x & x>۰ \\ \frac{x^۲}{-x}=-x & x<۰ \end{cases}$$

بنابراین ضابطه توابع f و g نیز باهم برابر است در نتیجه دو تابع f و g باهم برابرند.

تساوی توابع

دو تابع f و g را باهم برابر می‌نامیم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

دامنهٔ توابع f و g باهم **برابر** باشند.

برای هر x از دامنهٔ یکسان، $f(x)=g(x)$ باشد.

به عبارت دیگر، دو تابع f و g زمانی باهم برابرند که دامنه هر دو تابع (قبل از ساده کردن) و ضابطه آن‌ها (بعد از ساده کردن) باهم برابر باشند.

به عنوان مثال، دو تابع $f(x)=x-۲$ و $g(x)=\frac{x^{۲}-۴}{x+۲}$، باهم برابر نیستند، چرا که $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{-۲\}$ است.

مصحح شو:

الف) $(-۳,۶)$ (۰/۲۵)   ب) منفی (۰/۲۵)   پ) عمودمنصف (۰/۲۵)   ت) $\frac{۵}{۴}$ (۰/۲۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف) (صفحه ۷) می‌خواهیم که قرینه نقطه $A(۱,۲)$ را نسبت به نقطه $B(-۱,۴)$ پیدا کنیم. حال اگر نقطه موردنظر را نقطه M فرض کنیم در این صورت نقطه B وسط پاره‌خط AM قرار دارد، پس:

$$x_B=\frac{x_A+x_M}{۲}\Rightarrow -۱=\frac{۱+x_M}{۲}\Rightarrow ۱+x_M=-۲\Rightarrow x_M=-۳$$

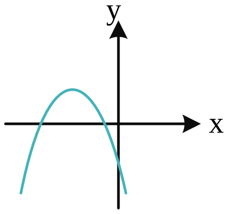
$$y_B=\frac{y_A+y_M}{۲}\Rightarrow ۴=\frac{۲+y_M}{۲}\Rightarrow ۲+y_M=۸\Rightarrow y_M=۶$$

بنابراین قرینه نقطه A نسبت به B به‌صورت $M(-۳,۶)$ است.

ب) با توجه به شکل مقابل، داریم:

۲

$$\begin{cases}a<۰\\ b<۰\\ c<۰\end{cases}\Rightarrow a\times b\times c<۰$$



۱

پ) هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به فاصله یکسان باشد آن نقطه روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

مکان هندسی‌های مهم

عمود منصف: مکان هندسی نقاطی که فاصله آن‌ها از دو سر پاره‌خط به یک اندازه باشد، عمودمنصف آن پاره‌خط است.

نتیجه: مکان هندسی نقطه‌ای از مثلث که از تمام رئوس آن به یک فاصله باشد، نقطه تلاقی عمود منصف‌های آن مثلث می‌باشد.

نیمساز: مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشند، نیمساز آن زاویه است.

نتیجه: مکان هندسی نقطه‌ای از مثلث که از تمام اضلاع آن مثلث به یک فاصله باشد، نقطه تلاقی نیمسازهای آن مثلث می‌باشد.

ت)

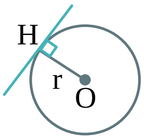
$$\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{a}{(۱۰+a)-a}=\frac{b}{(۸+b)-b}\Rightarrow\frac{a}{۱۰}=\frac{b}{۸}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۵}{۴}$$

۳

مصحح شو:

(صفحه ۹) با توجه به شکل زیر، فاصله مرکز دایره تا خط $۴x+۳y=۱۸$ یا شعاع دایره برابر است با:



$$\underbrace{r=OH=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}_{(۰/۵)}$$

$$r=\underbrace{\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}}_{(۰/۵)}=\underbrace{\frac{|۲۸+۱۵-۱۸|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۲۵}{۵}=۵}_{(۰/۵)}$$

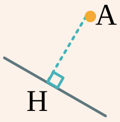
در نتیجه محیط دایره برابر است با:

محیط دایره: $\underbrace{۲\pi r=۲\pi(۵)=۱۰\pi}_{(۰/۵)}$

فاصلهٔ نقطه از خط

برای پیدا کردن فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ از خط $ax+by+c=۰$، از رابطه زیر کمک می‌گیریم:

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

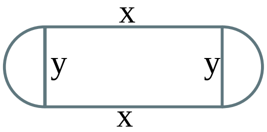


۲

۴

مصحح شو:

(صفحه ۱۸) با توجه به شکل زیر، طول مستطیل را برابر x و عرض مستطیل را برابر y فرض می‌کنیم، می‌دانیم که محیط زمین برابر ۲۰ متر است، پس:



محیط زمین $=\underbrace{۲x+\frac{۲\pi r}{۲}+\frac{۲\pi r}{۲}}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{۲x+۲\pi r=۲۰}_{(۰/۲۵)}$

توجه کنید که شعاع نیم‌دایره‌ها برابر $\frac{y}{۲}$ است، پس:

$$\underbrace{۲x+۲\pi\left(\frac{y}{۲}\right)=۲۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow ۲x+\pi y=۲۰\Rightarrow ۲x=۲۰-\pi y\Rightarrow\underbrace{x=\frac{۱}{۲}(۲۰-\pi y)}_{(۰/۵)}\quad(*)$$

حال، مساحت زمین برابر است با:

مساحت زمین = مساحت مستطیل +۲ (مساحت نیم‌دایره)

$$\underbrace{S=xy+۲\left(\frac{\pi r^۲}{۲}\right)}_{(۰/۲۵)}\xrightarrow[r=\frac{y}{۲}]{(*)}\underbrace{S=\frac{۱}{۲}(۲۰-\pi y)y+\pi\left(\frac{y}{۲}\right)^۲}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow\underbrace{S=۱۰y-\frac{\pi}{۲}y^۲+\frac{\pi}{۴}y^۲}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{S=-\frac{\pi}{۴}y^۲+۱۰y}_{(۰/۲۵)}$$

۳.۵

بنابراین مساحت زمین یک تابع درجه دوم برحسب y است که ماکزیمم آن به ازای $y=-\frac{b}{۲a}$ به‌دست می‌آید:

$$\underbrace{y=-\frac{b}{۲a}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{-\frac{۱۰}{-\frac{\pi}{۲}}=\frac{۲۰}{\pi}}_{(۰/۲۵)}$$

$$\xrightarrow{(*)}\underbrace{x=\frac{۱}{۲}(۲۰-\pi y)}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{x=\frac{۱}{۲}\left(۲۰-\pi\left(\frac{۲۰}{\pi}\right)\right)=۰}_{(۰/۲۵)}$$

پس برای ماکزیمم شدن مساحت زمین، باید شکل آن دایره‌ای به قطر $\frac{۲۰}{\pi}$ باشد. (۰/۲۵)

بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار یک تابع درجهٔ دوم:

در برخی از سؤالات مربوط به تابع درجهٔ دوم معادله یا نمودار یک تابع درجه دوم را به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند که بیش‌ترین مقدار و یا کم‌ترین مقدار آن را به‌دست بیاوریم، اما در بعضی از سؤال‌ها ابتدا باید به کمک اطلاعات موجود در مسئله، تابع درجه دوم را به‌صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ تشکیل داده و سپس با استفاده از رابطه $y_S=f\left(-\frac{b}{۲a}\right)=\frac{-\Delta}{۴a}$. بیش‌ترین مقدار و یا کم‌ترین مقدار آن را به‌دست بیاوریم.

۵

مصحح شو:

الف) (صفحه ۱۳)

می‌دانیم که مجموع ریشه‌های معادله $x^۲-(m+۲)x+۲m=۰$، برابر ۶ است:

$$\underbrace{S=-\frac{b}{a}=۶}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{-\frac{-(m+۲)}{۱}=۶}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow m+۲=۶\Rightarrow\underbrace{m=۴}_{(۰/۲۵)}$$

بنابراین حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله برابر است با:

$$\underbrace{P=\frac{c}{a}=\frac{۲m}{۱}=۲m}_{(۰/۲۵)}\xrightarrow{m=۴}\underbrace{P=۲m=۲(۴)=۸}_{(۰/۲۵)}$$

۲۰ شو

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند در این صورت:

جمع ریشه‌ها: $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

ضرب ریشه‌ها: $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

۳

ب) (صفحه ۲۴)

عدد صحیح را x فرض می‌کنیم. می‌دانیم که تفاضل آن از جذرش با نصف آن عدد برابر است، یعنی:

$$\overbrace{\sqrt{x}-x=\frac{x}{۲}}^{(۰/۵)} \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{x}{۲}+x \Rightarrow \underbrace{\sqrt{x}=\frac{۳}{۲}x}_{(۰/۲۵)}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \underbrace{x=\frac{۹}{۴}x^{۲}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \frac{۹}{۴}x^{۲}-x=۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{x\left(\frac{۹}{۴}x-۱\right)=۰}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{x=۰ \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} \text{قابل قبول}}_{(۰/۲۵)} \\ \frac{۹}{۴}x-۱=۰ \Rightarrow \frac{۹}{۴}x=۱ \Rightarrow \underbrace{x=\frac{۴}{۹} \xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}} \text{غیر قابل قبول}}_{(۰/۲۵)} \end{cases}$$

توجه کنید که چون $x=\frac{۴}{۹}$ عددی صحیح نمی‌باشد بنابراین قابل قبول نیست.

برای حل یک معادله رادیکالی باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱. یکی از رادیکال‌ها را در یک طرف معادله نگه می‌داریم و مابقی جمله‌ها را به طرف دیگر معادله منتقل می‌کنیم.

۲. طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم (معمولاً طرفین رو به توان ۲ می‌رسونیم).

(توجه داشته باشید که اگر با به توان رساندن طرفین معادله، مجدداً در معادله عبارت رادیکالی حضور داشته باشد سعی می‌کنیم که با تکرار مراحل ۱ و ۲، کل معادله را از حالت رادیکالی خارج کنیم.)

۳. معادلهٔ به‌دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و آن را حل می‌کنیم و جواب (یا جواب‌های) معادله را به‌دست می‌آوریم.

۴. جواب(های) به‌دست آمده را در معادله اصلی آزمایش می‌کنیم و جواب‌هایی را قبول می‌کنیم که اولاً در دامنه تعریف متغیر معادله قرار داشته باشند و ثانیاً در معادلهٔ اصلی صدق کنند.

مصحح شو:

۶

(صفحه ۲۱) فرض کنید طاها در t ساعت به تنهایی کل کار را انجام می‌دهد بنابراین طاها در هر ساعت $\frac{۱}{t}$ کل کار را انجام می‌دهد. می‌دانیم که سرعت کار یاسین $\frac{۱}{۳}$ برابر طاها است بنابراین یاسین در هر ساعت $\frac{۱}{۳t}$ کل کار را تمام می‌کند. از طرفی وقتی طاها و یاسین باهم کار می‌کنند در ۱۲ ساعت کل کار را تمام می‌کنند بنابراین این دو نفر، باهم در یک ساعت، $\frac{۱}{۱۲}$ کل کار را انجام می‌دهند بنابراین:

کار انجام شده توسط هر دو در هر ساعت = کار انجام شده توسط یاسین در هر ساعت + کار انجام شده توسط طاها در هر ساعت

$$\underbrace{\frac{۱}{t}+\frac{۱}{۳t}=\frac{۱}{۱۲}}_{(۰/۵)} \xrightarrow{\times ۳} \underbrace{\frac{۳}{t}+\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۴}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\frac{۴}{t}=\frac{۱}{۴}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{t=۱۶}_{(۰/۲۵)}$$

۱.۷۵

بنابراین:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{زمان انجام کار توسط طاها}: t = ۱۶ \ \text{ساعت} \\ \text{زمان انجام کار توسط یاسین}: \underbrace{۳t = ۳\times ۱۶ = ۴۸ \ \text{ساعت}}_{(۰/۵)} \end{array}\right.$$

دو نکته کوتاه و کاربردی برای حل معادلات گویا

الف) برای این نوع معادلات، مخرج مشترک بگیر.

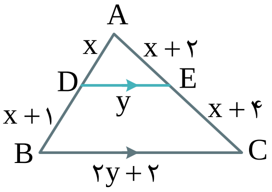
ب) ریشه‌های مخرج، نمی‌توانند جزء جواب معادله باشند.

۷

مصحح شو:

(صفحه ۴۱)

می‌دانیم که $DE \parallel BC$ است. حال با استفاده از قضیه تالس، داریم:



$$\underbrace{\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underbrace{\frac{x}{x+۱}=\frac{x+۲}{x+۴}}_{(۰/۵)}$$

$$\Rightarrow x(x+۴)=(x+۲)(x+۱)$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^۲+۴x=x^۲+۳x+۲}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{x=۲}_{(۰/۲۵)}$$

راهنمای مصحح

چنان‌چه دانش‌آموز از تعمیم قضیه تالس و با کمک تناسب $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$، برای به‌دست آوردن مقدار x اقدام کند، به پاسخ موردنظر نمره تعلق گیرد.

از طرفی به کمک تعمیم قضیه تالس، داریم:

$$\underbrace{\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underbrace{\frac{x}{۲x+۱}=\frac{y}{۲y+۲}}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{x=۲} \underbrace{\frac{۲}{۵}=\frac{y}{۲y+۲}}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{۴y+۴=۵y}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{y=۴}_{(۰/۲۵)}$$

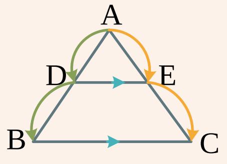
۳

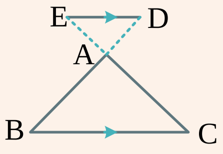
راهنمای مصحح

اگر مقدار y به کمک تناسب $\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$ نیز به‌دست بیاید، به آن قسمت نمره تعلق گیرد.

قضیه تالس و تعمیم آن

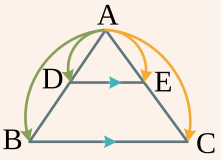
قضیه تالس: هرگاه در مثلثی، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث (یا امتداد آن‌ها) را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع (یا امتداد آن‌ها)، پاره‌خط‌هایی جدا می‌کند که اندازه آن‌ها تشکیل یک تناسب می‌دهند. این قضیه را اصطلاحاً تالس جزء‌به‌جزء می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر در شکل‌های زیر DE با BC موازی باشد، داریم:

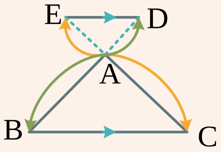




$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

تعمیم قضیه تالس: هرگاه خطی دو ضلع یک مثلث (یا امتداد آن‌ها) را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم مثلث موازی باشد، در این صورت مثلثی به‌وجود می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است. این قضیه را اصطلاحاً تالس جزء به کل می‌نامیم. به عبارت دیگر، اگر در شکل‌های زیر DE با BC موازی باشد، داریم:



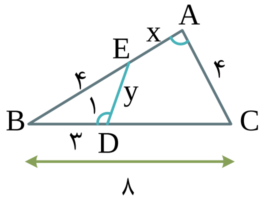


$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

۸

مصحح شو:

(صفحه ۴۶) دو مثلث ABC و DBE باهم متشابه‌اند، زیرا:



$$\begin{cases} B\hat{D}E=\hat{A} & (۰/۲۵) \\ \hat{B}=\text{مشترک} & (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{DBE} \quad (۰/۲۵)$$

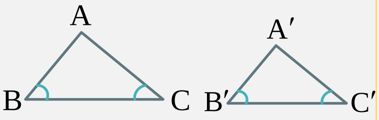
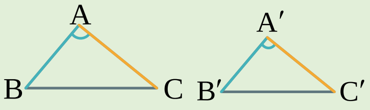
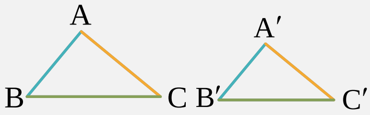
بنابراین اضلاع متناظر در دو مثلث باهم متناسب‌اند، یعنی:

$$\underbrace{\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{ED}=\frac{AB}{BD}}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underbrace{\frac{۸}{۴}=\frac{۴}{y}=\frac{x+۴}{۳}}_{(۰/۵)}$$

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{۸}{۴}=\frac{۴}{y}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow ۲=\frac{۴}{y} \Rightarrow ۲y=۴ \Rightarrow \underbrace{y=۲}_{(۰/۲۵)} \\ \underbrace{\frac{۸}{۴}=\frac{x+۴}{۳}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow ۲=\frac{x+۴}{۳} \Rightarrow x+۴=۶ \Rightarrow \underbrace{x=۲}_{(۰/۲۵)} \end{cases}$$

حالت‌های تشابه دو مثلث:

با استفاده از قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها می‌توان سه قضیهٔ زیر را نتیجه گرفت که این قضایا حالت‌های تشابه دو مثلث را بیان می‌کنند:

هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث به حالت دو زاویهٔ برابر (ز ز)، متشابه‌اند.	$\begin{cases}\hat{B}=\hat{B'} \\ \hat{C}=\hat{C'}\end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{A'B'C'}$	
هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب بوده و زاویهٔ بین آن‌ها باهم برابر باشد، آن دو مثلث به حالت دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر (ض ز ض)، متشابه‌اند.	$\begin{cases}\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'} \\ \hat{A}=\hat{A'}\end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{A'B'C'}$	
هرگاه اندازهٔ سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث به حالت سه ضلع متناسب (ض ض ض)، متشابه‌اند.	$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{A'B'C'}$	

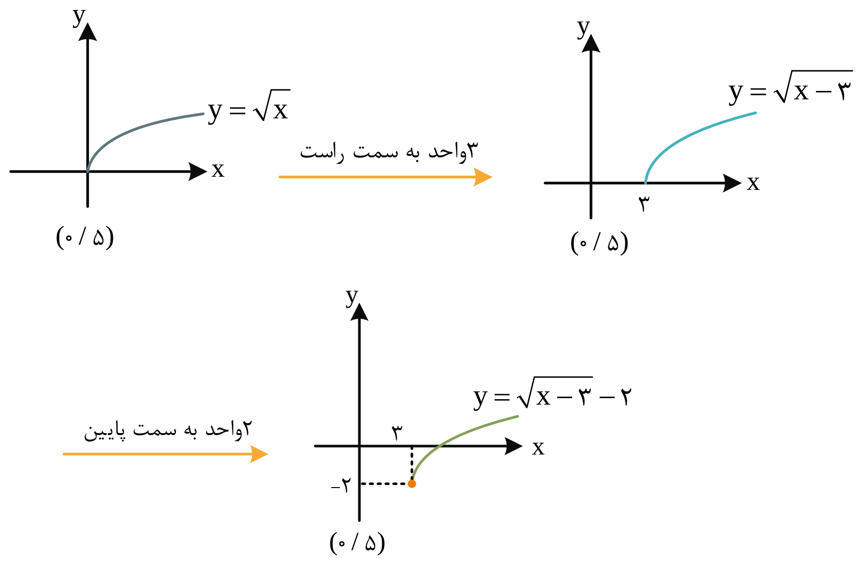
۲.۷۵

۹	مصحح شو:	۲

مصحح شو:

(صفحه ۵۶)

به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$، نمودار تابع $f(x)=-۲+\sqrt{x-۳}$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل مشخص است که دامنه تابع f به‌صورت $\underbrace{D_f=[۳,+\infty)}_{(۰/۵)}$ است.

انتقال توابع:

نمودار جدید $(a,k>۰)$	توضیحات و نحوه رسم
$f(x+a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور xها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x-a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور xها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x)+a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور yها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x)-a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور yها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

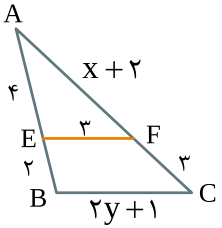
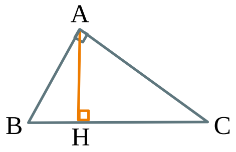
موفق باشید. ۲۰

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

آزمون شماره ۶ ماز

به نام خدا

سوالات آزمون نهایی درس: **ریاضی ۲**	تعداد صفحه: **۱**	رشته: **علوم‌تجربی**	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه – یازدهم	تاریخ آزمون: **۱۴۰۴/۰۲/۱۸**	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: **۴۰ دقیقه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)	نمره
۱	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) فاصله نقطه $A(۲,-۱)$ از خط $۳x-۴y=۵$ برابر .... و فاصله آن از نقطه $B(-۱,۳)$ برابر .... است. ب) در تابع $f(x)=x^۲-۶x+۲$ مجموع ریشه‌های تابع برابر .... و مینیمم تابع برابر .... است. پ) اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۱)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,۰),(-۱,۲)\}$ باشد، تعداد اعضای دامنهٔ توابع $f+g$ و $\frac{f}{g}$ به ترتیب برابر .... و .... است. ت) وارون تابع $y=۲x-۶$ محور xها را در نقطه‌ای به طول .... و محور yها را در نقطه‌ای به عرض .... قطع می‌کند.	۲
۲	الف) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۳+\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{۳-\sqrt{۲}}{۲}$ باشد. ب) معادلهٔ $\sqrt{۲x+۳}-۲x=۱$ را حل کنید. پ) حدود m را به گونه‌ای بیابید که معادلهٔ $x^۲-۲x+m=۰$ دو ریشهٔ حقیقی مثبت و متمایز داشته باشد.	۵
۳	در شکل مقابل، EF موازی BC است. الف) مقادیر x و y را به‌دست آورید. ب) نسبت مساحت ذوزنقهٔ $BEFC$ به مساحت مثلث ABC را بیابید.  	۳
۴	در مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل، $AB=۶$ و $AC=۸$ است. الف) نشان دهید دو مثلث ABC و ABH متشابه‌اند. ب) ثابت کنید: $AB^۲=BH.BC$ پ) اندازهٔ CH را به‌دست آورید.  	۳
۵	الف) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-[x] & ۰\le x<۲\\ \sqrt{x-۲}-۱ & ۲\le x\le ۳\end{cases}$ را رسم کنید. ب) مقدار a را به گونه‌ای تعیین کنید که وارون تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x+a$ از نقطهٔ $A(۳,۴)$ عبور کند و سپس ضابطهٔ وارون f را به‌دست آورید. پ) اگر $f=\{(۱,۲),(۲,-۱),(۳,۴),(۴,۱)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۴,۳),(۱,-۲),(۳,-۱)\}$ باشد، تابع $f^{-۱}+g$ و برد آن را به‌دست آورید.	۵
۶	الف) زاویهٔ ۱۲۰° را به رادیان و زاویهٔ $-\frac{۲\pi}{۵}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید. ب) در دایره‌ای به شعاع ۲۰ سانتی‌متر، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمانی به طول ۶π سانتی‌متر از این دایره را برحسب درجه به‌دست آورید.	۲
	موفق باشید.	۲۰

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	مصحّح شو: الف) ۱ و ۵ (۰/۵) ب) ۶ و −۷ (۰/۵) پ) ۲ و ۱ (۰/۵) ت) −۶ و ۳ (۰/۵)	۲
۲	مصحّح شو: الف) $S=\frac{۳+\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۳-\sqrt{۲}}{۲}=۳$ (۰/۲۵) $P=\frac{۳+\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۳-\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۹-۲}{۴}=\frac{۷}{۴}$ (۰/۲۵) $\underbrace{x^{۲}-Sx+P=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow x^{۲}-۳x+\frac{۷}{۴}=۰$ (۰/۲۵) ب) $\underbrace{\sqrt{۲x+۳}=۲x+۱}_{(۰/۲۵)}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\underbrace{۲x+۳=۴x^{۲}+۴x+۱}_{(۰/۲۵)}$ $\Rightarrow ۴x^{۲}+۲x-۲=۰\Rightarrow ۲x^{۲}+x-۱=۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (x+۱)(۲x-۱)=۰\Rightarrow \underbrace{x=-۱}_{(۰/۲۵)},\ \underbrace{x=\frac{۱}{۲}}_{(۰/۲۵)}$ جواب $x=-۱$ قابل قبول نیست، چون در معادله صدق نمی‌کند. (۰/۲۵) پ) سه شرط $\Delta>۰$ (۰/۲۵) و $P>۰$ (۰/۲۵) و $S>۰$ (۰/۲۵) را بررسی می‌کنیم: $\left\{\begin{array}{l}\Delta=b^{۲}-۴ac=۴-۴m\Rightarrow \underbrace{۴-۴m>۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow m<۱\ (۰/۲۵)\\ \underbrace{P=\frac{c}{a}}_{(۰/۲۵)}=m\Rightarrow m>۰\ (۰/۲۵)\\ \underbrace{S=-\frac{b}{a}}_{(۰/۲۵)}=-\frac{-۲}{۱}=۲\Rightarrow ۲>۰(۰/۲۵)\end{array}\right.$ از اشتراک این سه شرط به جواب $۰<m<۱$ (۰/۲۵) می‌رسیم.	۵

برای حل یک معادله رادیکالی باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱. یکی از رادیکال‌ها را در یک طرف معادله نگه می‌داریم و مابقی جمله‌ها را به طرف دیگر معادله منتقل می‌کنیم.

۲. طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم (معمولاً طرفین رو به توان ۲ می‌رسونیم).

(توجه داشته باشید که اگر با به توان رساندن طرفین معادله، مجدداً در معادله عبارت رادیکالی حضور داشته باشد سعی می‌کنیم که با تکرار مراحل ۱ و ۲، کل معادله را از حالت رادیکالی خارج کنیم.)

۳. معادلهٔ به‌دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و آن را حل می‌کنیم و جواب (یا جواب‌های) معادله را به‌دست می‌آوریم.

۴. جواب(های) به‌دست آمده را در معادله اصلی آزمایش می‌کنیم و جواب‌هایی را قبول می‌کنیم که اولاً در دامنه تعریف متغیر معادله قرار داشته باشند و ثانیاً در معادلهٔ اصلی صدق کنند.

جمع و ضرب ریشه‌ها

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند در این صورت:

$$\begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها}: S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \\ \text{ضرب ریشه‌ها}: P=\alpha\beta=\frac{c}{a} \end{cases}$$

۳

مصحّح شو:

الف)

$$\underset{(۰/۲۵)}{\frac{AE}{AB}}=\underset{(۰/۲۵)}{\frac{AF}{AC}}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow \frac{۴}{۶}=\underset{(۰/۲۵)}{\frac{x+۲}{x+۵}}=\underset{(۰/۲۵)}{\frac{۳}{۲y+۱}}$$

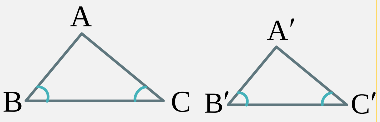
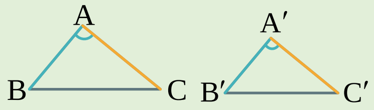
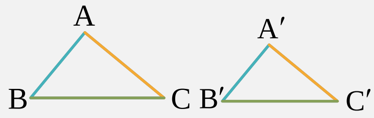
$$\Rightarrow\begin{cases} \frac{x+۲}{x+۵}\overset{(۰/۲۵)}{=}\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳x+۶=۲x+۱۰\Rightarrow x=۴ \quad (۰/۲۵) \\ \underset{(۰/۲۵)}{\frac{۳}{۲y+۱}=\frac{۲}{۳}}\Rightarrow ۴y+۲=۹\Rightarrow y=\frac{۷}{۴} \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

ب) مثلث AEF با مثلث ABC متشابه است (۰/۲۵) و نسبت تشابه برابر $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{AE}{AB}$ (۰/۲۵) است، پس نسبت مساحت مثلث AEF به مساحت مثلث ABC برابر $\frac{۴}{۹}=(\frac{۲}{۳})^۲$ (۰/۲۵) است، پس نسبت مساحت ذوزنقه EFCB به مثلث ABC برابر $\frac{۵}{۹}$ (۰/۲۵) است.

۳

حالت‌های تشابه دو مثلث:

با استفاده از قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها می‌توان سه قضیهٔ زیر را نتیجه گرفت که این قضایا حالت‌های تشابه دو مثلث را بیان می‌کنند:

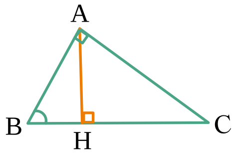
هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث به حالت دو زاویهٔ برابر (ز ز)، متشابه‌اند.	$\begin{cases}\hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$	
هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب بوده و زاویهٔ بین آن‌ها باهم برابر باشد، آن دو مثلث به حالت دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر (ض ز ض)، متشابه‌اند.	$\begin{cases}\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}\\ \hat{A}=\hat{A}'\end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$	
هرگاه اندازهٔ سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث به حالت سه ضلع متناسب (ض ض ض)، متشابه‌اند.	$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$	

۴

مصحّح شو:

الف) هر دو مثلث در زاویهٔ B مشترک‌اند (۰/۲۵) و هر دو یک زاویه ۹۰° دارند (۰/۲۵) پس در حالت دو زاویه با هم متشابه‌اند (۰/۲۵).

ب)



$$\overset{\triangle}{ABH} \overset{(۰/۲۵)}{\sim} \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} \overset{(۰/۵)}{=} \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^{۲} = BC.BH \quad (۰/۲۵)$$

پ) $\underset{(۰/۲۵)}{BC=۱۰} \Rightarrow AB^{۲} = BC.BH \Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{۳۶=۱۰\times BH} \Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{BH=۳/۶} \Rightarrow CH=۶/۴ \quad (۰/۵)$

۳

۵

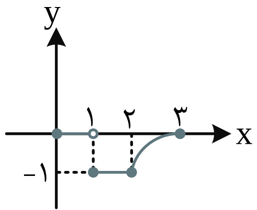
مصحّح شو:

الف)

$۰\le x<۱ \Rightarrow y=-[x]=۰ \quad (۰/۲۵)$

$۱\le x<۲ \Rightarrow y=-[x]=-۱ \quad (۰/۲۵)$

برای رسم نمودار $y=\sqrt{x-۲}-۱$، نمودار $\sqrt{x}$ را دو واحد به راست (۰/۲۵) و یک واحد به پایین (۰/۲۵) انتقال می‌دهیم.



(۰/۵)

۵

ب) $f^{-۱}(۳)=۴ \Rightarrow f(۴)=۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۴+a=۳ \Rightarrow a=۱$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$y=\frac{۱}{۲}x+۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x=y-۱ \Rightarrow x=۲y-۲$ (۰/۲۵)

ضابطه وارون: $f^{-۱}(x)=y=۲x-۲$ (۰/۵)

پ) $f^{-۱}=\{(۲,۱),(-۱,۲),(۴,۳),(۱,۴)\}$ (۰/۵)

$f^{-۱}+g=\{(۲,۲),(۴,۶),(۱,۲)\}$ (۰/۷۵)

برد $=\{۲,۶\}$ (۰/۵)

انتقال توابع

نمودار جدید $(a,k>۰)$	توضیحات و نحوه رسم
$f(x+a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور xها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x-a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور xها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x)+a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور yها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x)-a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور yها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

ضابطه تابع وارون

۱- به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیرثابت:

برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیرثابت مانند f، در معادله $y=f(x)$، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم. سپس با جابه‌جا کردن y و x، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

۲- اگر نقطه (a,b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، در این صورت نقطه (b,a) روی نمودار تابع $f^{-۱}$ قرار دارد، به عبارت دیگر:

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-۱}$$

اعمال جبری روی توابع

اگر توابع f و g به ترتیب دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، در این صورت جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ... این توابع را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

عملیات	ضابطه	دامنه
جمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g$
تفریق	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g$
ضرب	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$	$D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)};(g(x)\neq ۰)$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}$

وارون یک تابع و تابع وارون

اگر در نمایش زوج مرتبی یک تابع، جای مؤلفهٔ اول و دوم را در همه زوج مرتب‌ها باهم عوض کنیم، مجموعهٔ جدیدی به‌دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با $f^{-۱}$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که وارون یک تابع، ممکن است تابع نباشد.

$$f=\{(-۱,۳),(۲,۱),(-۲,۳),(۰,۴)\}$$

$$f^{-۱}=\{(۳,-۱),(۱,۲),(۳,-۲),(۴,۰)\}$$

همان‌طور که می‌بینید، وارون تابع f، تابع نمی‌باشد. حال، اگر وارون یک تابع، خود یک تابع باشد، آن‌گاه تابع f را وارون‌پذیر می‌گوییم و $f^{-۱}$ را تابع وارون f می‌نامیم.

۶

مصحّح شو:

الف)

$$\underset{(۰/۲۵)}{\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}}\Rightarrow\begin{cases}\underset{(۰/۲۵)}{\frac{۱۲^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}}\Rightarrow R=\frac{۱۲\pi}{۱۸۰}=\frac{\pi}{۱۵}\quad(۰/۲۵)\\ \underset{(۰/۲۵)}{\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{-\frac{۲\pi}{۵}}{\pi}}=-\frac{۲}{۵}\Rightarrow D=-۷۲^\circ\quad(۰/۲۵)\end{cases}$$

ب)

$$\underset{(۰/۲۵)}{\alpha=\frac{\ell}{R}}=\underset{(۰/۲۵)}{\frac{۶\pi}{۲۰}=\frac{۳\pi}{۱۰}}\text{رادیان}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{۳\pi}{۱۰}}{\pi}\Rightarrow D=۵۴^\circ\quad(۰/۲۵)$$

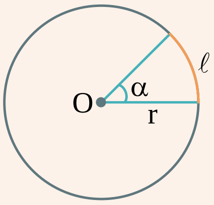
تبدیل رادیان به درجه و بالعکس

اگر D اندازهٔ زاویهٔ α برحسب درجه و R اندازهٔ زاویه α برحسب رادیان باشد، آن‌گاه:

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi\ \text{رادیان}}$$

اندازه طول کمان

اگر ℓ طول کمان روبه‌روی زاویه، r اندازهٔ شعاع دایره و α اندازهٔ زاویه برحسب رادیان باشد، آن‌گاه طول کمان برابر است با:



$$\ell=r\alpha$$

(در رابطهٔ بالا ℓ و r هم‌واحدند.)

۲

۲۰ موفق باشید.